द्वितीय सेमेस्टर : शिक्षा 025 - विद्यालय विषय शिक्षण

(गणित शिक्षण)

प्रधान संपादक

प्रो. गिरीश्वर मिश्र
कुलपति
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

संपादक

प्रो. अरबिंद कुमार झा
निदेशक (दूर शिक्षा निदेशालय)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

पाठ्यचर्या निर्माण समिति

प्रो. अरबिंद कुमार झा
अधिष्ठाता, शिक्षा विद्यापीठ
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

डॉ. गोपाल कृष्ण ठाकुर
सह प्रोफ़ेसर (शिक्षा विद्यापीठ)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

श्री ऋषभ कुमार मिश्र
सहा प्रोफेसर (शिक्षा विद्यापीठ)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

संपादन मंडल

प्रो. अरबिंद कुमार झा
निदेशक (दूर शिक्षा निदेशालय)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

विद्याशंकर शुक्ल
पूर्व निदेशक,
केंद्रीय हिंदी संस्थान, सिलॉग

डॉ. गोपाल कृष्ण ठाकुर
सह प्रोफ़ेसर (शिक्षा विद्यापीठ)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

डॉ. शिरीष पाल सिंह
सह प्रोफ़ेसर (शिक्षा विद्यापीठ)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

श्री ऋषभ कुमार मिश्र
सहा प्रोफ़ेसर (शिक्षा विद्यापीठ)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

सुश्री सारिका राय शर्मा
सहा प्रोफ़ेसर (शिक्षा विद्यापीठ)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

डॉ. गुणवंत सोनोने
सहा प्रोफ़ेसर (दूर शिक्षा निदेशालय)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

डॉ. समीर कुमार पाण्डेय
सहा प्रोफ़ेसर (दूर शिक्षा निदेशालय)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

डॉ. आदित्य चतुर्वेदी
सहा प्रोफ़ेसर (दूर शिक्षा निदेशालय)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

श्री ब्रम्हा नन्द मिश्र
सहा प्रोफ़ेसर (दूर शिक्षा निदेशालय)
म.गां.अं.हिं.वि., वर्धा

इकाई लेखन

समन्वयक- प्रो. अरबिंद कुमार झा

इकाई -1
प्रो. अरबिंद कुमार झा
श्री ऋषिकेश बहादुर

इकाई -2
प्रो. अरबिंद कुमार झा
श्री ऋषिकेश बहादुर

इकाई -3
प्रो. अरबिंद कुमार झा
श्री ऋषिकेश बहादुर

इकाई -4
प्रो. अरबिंद कुमार झा
श्री ऋषिकेश बहादुर

इकाई – 5
प्रो. अरबिंद कुमार झा
श्री ऋषिकेश बहादुर

अनुक्रम

क्र.सं.	इकाईयों का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	इकाई 1: गणितीय संप्रत्यय, उद्देश्य और चिंतन का परिचय	5-24
2.	इकाई 2: गणित सीखना, पाठ्यक्रम और विधियाँ	25-48
3.	इकाई 3: गणित शिक्षण का पाठ्यक्रम और योजना	49-70
4.	इकाई 4: हम आसानी (Easy) से गणित कैसे सिखाए?	71-84
5.	इकाई 5: गणित में मूल्यांकन	85-103

प्रधान संपादक की कलम से.....

संपादक की कलम से.....

इकाई -1: गणितीय संप्रत्यय, उद्देश्य और चिंतन का परिचय

इकाई की संरचना

1.1.0 उद्देश्य

1.2.0 प्रस्तावना

1.3.0 गणित शिक्षण पर विशेष ध्यान देते हुए गणित का इतिहास

1.3.1 भारतीय गणितज्ञों का योगदान

अपनी प्रगति की जाँच करें

1.4.0 गणित का अर्थ

1.4.1 गणित का क्षेत्र

1.4.2 गणित की प्रकृति

अपनी प्रगति की जाँच करें

1.5.0 गणित शिक्षण के उद्देश्य और प्राप्य उद्देश्य

1.6.0 गणित का अन्य विषयों के साथ सह-सम्बंध

अपनी प्रगति की जाँच करें

1.7.0 पैटर्न की रचना जानना व सामान्यीकृत पैटर्न के रूप में गणित का अध्ययन

1.7.1 आकृतियों का पैटर्न

1.7.2 सांख्यकीय पैटर्न

1.7.3 अमूर्त पैटर्न की पहचान और विश्लेषण

1.8.0 गणित को मानव द्वारा रचित विषय के रूप में समझना

1.8.1 गणितीय संरचना (structure) का निर्माण

1.8.2 स्वयंसिद्धियाँ (Axioms)

1.8.3 अभीगृहीतियाँ (Postulates)

1.8.4 प्रमाण (Proof): प्रमाण क्या है? प्रमाण के विभिन्न विधियाँ: प्रत्यक्ष (Direct), अप्रत्यक्ष(Indirect), विपरीत उदाहरण(Counter Examples) और आगमन के द्वारा प्रमाण

अपनी प्रगति की जाँच करें

1.9.0 दिन-प्रतिदिन प्रयुक्त गणित

1.10.0 बहुसांस्कृतिक गणित

1.11.0 गणित में सौंदर्य सिद्धांत

अपनी प्रगति की जाँच करें

1.12.0 सारांश

1.13.0 अपनी प्रगति के लिए अपेक्षित उत्तर

1.14.0 संदर्भ पुस्तकें

1.1.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के उपरांत आप-

- गणित का इतिहास और भारतीय गणितज्ञों एवं पाश्चात्य गणितज्ञों के योगदान को समझ पाएँगे।
- गणित की प्रकृति को समझते हुए उसके अर्थ को स्पष्ट करने में सक्षम हो जाएँगे।
- गणित शिक्षण के उद्देश्य और प्राप्य उद्देश्य में अंतर कर सकेंगे।
- गणित विषय का अन्य विषयों के साथ सह-संबंध को समझेंगे।
- गणितीय संरचनाओं के निर्माण को समझते हुए गणित को मानव रचित विषय के रूप में समझ पाएँगे।
- गणित का दिन-प्रतिदिन उपयोग को समझ पाएँगे।

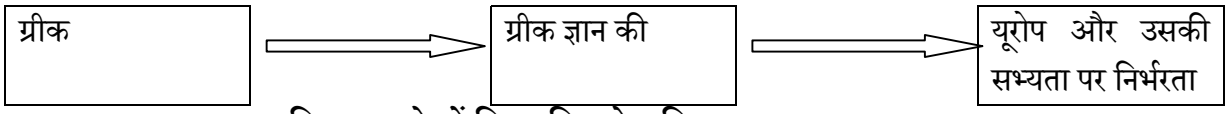
1.2.0 प्रस्तावना

गणित मनुष्य जीवन का गणनात्मक पक्ष है, जिसमें जीवन से संबंधित वस्तुओं के बारे में गणना की जाती है। प्रारंभ में केवल गणित को ही ज्ञान माना जाता था। प्रसिद्ध गणितज्ञ पाइथागोरस के समय में साहित्य और भाषण कला के ज्ञान के अतिरिक्त इसे शेष ज्ञान माना जाता था। इसलिए इसे सभी विषयों का जनक भी कहा गया है। इतना ही नहीं, बल्कि गणित अंकों का एक खेल है, जिसमें कुछ नियमों का पालन करना पड़ता है। ये नियम गणित के प्रारंभिक नियम कहे जाते हैं, अन्य नियम इन्हीं के विकसित रूप हैं। गणित एक ऐसा साधन है, जिसके माध्यम से छात्र युक्तिसंगत ढंग से चिंतन, बोध, तर्क-वितर्क, विश्लेषण एवं स्पष्टीकरण करने की योग्यता अर्जित करता है। एक विशिष्ट विषय के अतिरिक्त गणित को ऐसे किसी भी विषय का सहवर्ती माना जाना चाहिए, जिसमें विश्लेषण व तर्क शक्ति की आवश्यकता पड़ती है। वस्तुत: गणित वह अद्भुत उपकरण है, जिसे मानव प्रतिभा ने सत्य के अन्वेंषण के लिए निर्मित किया है।

1.3.0 गणित शिक्षण पर जोर देते हुए गणित का इतिहास

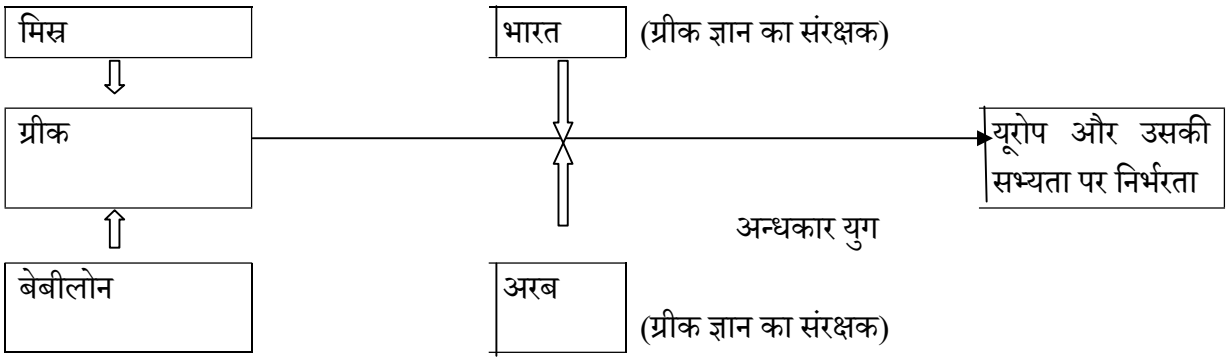
गणित का इतिहास, मुख्यतः गणित का एक बृहत विषय है। इसका प्राचीन समय में कभी पूर्ण अध्ययन नही किया गया, जो कि अभी भी अज्ञात है या जो समय के साथ खो गया। फिर भी बहुत कुछ ज्ञात है और बहुत सारी महत्वपूर्ण खोज जो मुख्यतः पिछले 150 वर्षों में हुई, वह सार्थक रूप से गणित के इतिहास के कालानुक्रम को दर्शाती है।

गणित के इतिहास का आधारभूत कालानुक्रम बहुत ही आसान था; यह पूर्व में प्राचीन ग्रीकों का खोज था, जिनका काम प्रथम शताब्दी के मध्य तक जारी था, उसके लगभग 1000 वर्षों तक कोई सार्थक काम नहीं हुआ जब तक कि यूरोप में नवजागरण नही हुआ था, जिसे कि यूरोप के ज्ञान और सभ्यता का 'उदय' काल माना जाता है। इसलिए उस अवधि को 'अंधकार युग' भी कहा जाता है।



चित्र 1: यूरोपकेंद्रित गणित के इतिहास का कालानुक्रम.

कुछ इतिहासकार ने कुछ स्वीकृतियाँ प्रदान कीं, इन्होंनें मिस्र, बेबीलोन, भारत और अरब के गणित (और कभी कभी सुदूर पूर्व और चीन) के योगदान को भी स्वीकार किया है। यूरोपकेंद्रित पाठ का संशोधित पाठ कुछ इस प्रकार नीचे दिया गया है।



चित्र 2: यूरोपकेंद्रित मॉडल का संशोधित रूप

यद्यपि, इन 'दूसरो' या 'गैर यूरोपियन' का योगदान हमेशा संक्षिप्त तथा अस्पष्ट रहा है और सामान्यतः यह जोड़ा जाता है कि वे ग्रीक कार्यों का पुन: निर्माण करते थे और उन्होंने कोई सार्थक या महत्वपूर्ण योगदान नही दिया है। भारतीय विद्वानों का ज़िक्र सामान्यतः कम किया जाता रहा है, उन्हें प्राचीन ग्रीक के ज्ञान संरक्षक के रूप में जाना जाता रहा है। परंतु, यहाँ बहुलता से उनके कार्य और तथा कथित वाक्य मिलते है, जो कि उनकें कार्यों को बताते हैं, इसे हम 'गैर-यूरोपियन गणित' कहते हैं।

p Duhem ("Le systeme du monde" ,1965) बहुत ही साधारण बात कहते हैं, ".....अरबी विज्ञान केवल ग्रीक विज्ञान के शिक्षण से निकली बातों से तैयार हुई है।" [RR, P 338] आगे **G Sarton** (" guide to the history of science", 1927) कहते है, ".....हिंदू और चीनी के गणित के विकास को लगभग ख़त्म कर देना चाहिए।" [AA'D, P 15] इस प्रकार की सोच भारतीय गणितज्ञों के विषय में पूर्णतः दोषयुक्त अभिवृत्ति देखने को मिलती है। होगबेन ने कहा कि, "गणित सभ्यता का प्रतिबिम्ब होता है।" मानव जाति की उन्नति और सभ्यता के विकास में गणित का महत्वपूर्ण योगदान रहा है। गणित तथा मनुष्य का संबंध आदिकाल से रहा है तथा मानव जीवन की समस्याओं को हल करने में इस विषय ने महत्वपूर्ण योगदान किया है। गणित मनुष्य की प्रकृति का एक भाग है तथा मनुष्य ने स्वयं अपनी प्रकृति जानने की प्रक्रिया में गणित को विकसित किया और अपनी परिस्थितियों को सुधारने में उसका उपयोग किया।

आदिकाल में मनुष्य असभ्य एवं जंगली था तथा उसमें इकाई का स्पष्ट ज्ञान नही था। सभ्यता के क्रमिक विकास के साथ-साथ आदिमानव को 'कम', 'अधिक', और 'नहीं' की मात्रा को संकेतों में व्यक्त करने की

आवश्कता पड़ी और धीरे-धीरे 'इकाई' तथा संख्या की निष्पतियों एवं संकेतों का विकास हुआ। यदि सभ्यता के साथ गणित का विकास नहीं हुआ होता तो आज हम जिस प्रगति के स्तर को प्राप्त कर सके हैं, शायद वह नहीं कर पाते। गणित के विकास का इतिहास हमारे विद्यार्थियों को जानना चाहिए, ताकि उनको आभास हो सके कि किस प्रकार गणित ने हमारी सभ्यता और संस्कृति को विकसित करने में सहायता की है। कहा जाता है कि मनुष्य में संख्या बुद्धि (number sense) ईश्वर प्रदत्त है और गणित के विकास का आधार संख्या बुध्दि को ही माना जाना चाहिए।

प्राचीन भारत में गणितज्ञों ने काफ़ी उन्नति की थी। 'गणित' शब्द बहुत प्राचीन है तथा वैदिक साहित्य में इसका प्रचुर उपयोग किया गया है। गणित शब्द का शाब्दिक अर्थ है, "वह शास्त्र जिसमें गणना की प्रधानता हो।" वेदांगों में गणित को सबसे ऊँचा स्थान दिया गया है।

भारतीय अंको की संकल्पना

भारत में महाभारत काल में जो संख्या प्रणाली काम में लाई जाती थी, वह इस प्रकार की थी-

लाख = 10^5 दस लाख = 10^6

करोड़ = 10^7 दस करोड़ = 10^8

अरब = 10^9 दस अरब = 10^{10}

भारत में विकसित गणित के विचारों को विदेशों से आए व्यापारी समय-समय पर अपने देशों में ले गए तथा उनका उपयोग करना शुरू किया और शनै:-शनै: उन विचारों का श्रेय स्वयं के देश को देने लगे। भारत में यूनान, रोम, अरब, चीन आदि देशों से आए व्यापारियों के कारण भारतीय गणित का ज्ञान इन देशों में पहुँचा। यह इस बात से सिद्ध होता है कि ईस्वी सन के पूर्व लिखे गए जैन ग्रंथों में एक ऐसी बड़ी संख्या की जानकारी मिलती है जो 194 स्थान लेती है तथा जिसका मान $(84,00,000)^{28}$ बतलाया गया है।

मोहनजोदड़ो से प्राप्त मुहरों एवं लेखों के अंकसूचक चिन्हों में एक से लेकर 13 तक अंक खड़ी पाइयों के रूप में लिखे हुए मिलते हैं जो निम्नांकित चित्र में दिखाए गए हैं-

I III III_I IIII II III

शून्य

जे.बी.हैल्सटेड ने 'ऑन दि फाउंडेशन एंड टेक्निक ऑफ अरिथमेटिक, शिकागो (1912)' में यह स्वीकार किया है कि शून्य भारत की देन है, जिसने संसार को सभ्य बनाने में सहायता दी है। वे लिखते हैं कि "शून्य के आविष्कार के महत्व की कभी भी अतिशयोक्ति नहीं की जा सकती।"

गणित और अरब देश

अरब में विज्ञान एवं गणित की प्रगति प्राय: विदेशी सामग्री और विदेशी लोगों की सहायता से हुई। यूनान और भारत का इस संदर्भ में महत्वपूर्ण योगदान रहा है। प्रारंभ में अरबी भाषा में अंक संकेत नहीं थे और वहाँ पर

यूनानी अंक संकेतों का प्रयोग होता था। कुछ विद्वानों का मत है कि ईसा की दूसरी शताब्दी में, जब शून्य का आविष्कार नहीं हुआ था, भारत से अंक संकेत अलेक्जेंड्रिया लाए गए थे तथा वहाँ से उनका प्रचार रोम और अफ्रीका में हुआ था। लगभग आठवीं शताब्दी में शून्य का आविष्कार भारत में हुआ था। इसके पश्चात् अरबों ने इसका प्रयोग शुरू कर दिया था किंतु उन्होंने अपने अंक संकेतों में कोई परिवर्तन नहीं किया था।

मिस्र निवासी

अरस्तू का कथन है कि गणित का जन्म मिस्र में हुआ था। मिस्र निवासियों ने पिरामिड बहुत प्राचीन काल में निर्मित किए थे और रेखा गणित के ज्ञान के आधार पर ही सब कुछ हो सका था।

मिस्र निवासी आज से लगभग 2000 ई.पू. में भी एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 3:4:5 के अनुपात में हों, के परस्पर संबंध को जानते थे। मिस्र निवासियों ने वृत्त के क्षेत्रफल ज्ञात करने में $\pi = 3.1604$ का उपयोग किया था।

हिंदू

प्राचीन भारत में गणित ने जो प्रगति की वह विश्व के लिए महत्वपूर्ण गणितीय आधार प्रदान करती है। प्राचीन भारत की विश्व को संख्या विज्ञान, संख्या प्रतीकवाद, बीजगणित, त्रिकोणमिति आदि महत्वपूर्ण देन हैं। खगोलशास्त्र प्राचीन भारत में उच्च शिखर पर था।

प्रसिद्ध खगोलशास्त्री आर्यभट्ट का जन्म 476 A.D. में पाटलिपुत्र में हुआ था। उसके बाद ब्रहागुप्त ने सन 628 A.D. में 'ब्रहा स्फुट सिद्धांत' नामक पुस्तक लिखी। श्रीधर ने 'गणित सार' लिखा। भारतीयों ने प्राचीनकाल में रेखागणित का उपयोग हवन वेदी बनाने में किया, जिनकी आकृति वर्गाकार तथा आयताकार होती थी। वेदियों के निर्माण में त्रिभुज, वृत्त आदि के क्षेत्रफलों के सिद्धांतों का प्रयोग किया जाता था। भारतीय गणित ने विज्ञान कि दुनिया में जो स्थान बनाया है, वह हमारे लिए अत्यंत गौरव की बात है।

1.3.1 भारत के कुछ महान गणितज्ञ

गणितज्ञ का नाम	काल (ईसवी)	ग्रंथ
आर्यभट्ट	476-550	आर्यभटीय
वराहमिहिर	505-587	पंचसिद्धांतिका
ब्रहागुप्त	598	ब्रहास्फुट सिद्धांत
भास्कर (प्रथम)	629	महाभास्करीय, लघुभाष्करिय
श्रीधराचार्य	750	पाटी गणित, त्रिशतिका
वीरसेन	710-790	धवलाटीका
महावीराचार्य	850	गणितसार संग्रह
आर्यभट्ट (द्वितीय)	950	महाआर्य सिद्धांत
भास्कराचार्य (द्वितीय)	1114-1193	सिद्धांतशिरोमणि, लीलावती
माधवाचार्य	1340-1425	चन्द्रवाक्यानि
नारायण पंडित	1356	गणित कौमुदी

श्रीनिवास रामानुजन 1887-1920 संख्या सिद्धांत

आर्यभट्ट प्रथम

आर्यभट्ट नाम से दो महान गणितज्ञ भारत में हुए हैं। इन दोनों में से एक 476 ई. में पटना के निकट कुसुमपुर नामक नगर में पैदा हुए थे और जिन्होंने 499 ई. में 'आर्यभट्टीय' नामक पुस्तक लिखी थी। इन्हें इतिहास में आर्यभट्ट प्रथम के नाम से जाना जाता है। इसी नाम के दूसरे गणितज्ञ इनके बाद में हुए, जिन्होंने 950 ई. के लगभग 'महाआर्य सिद्धांत' नामक पुस्तक लिखी थी। इतिहास में इन्हें 'आर्यभट्ट द्वितीय' के नाम से जाना जाता है। कुछ लेखकों ने आर्यभट्ट प्रथम को बिहार निवासी न मानकर केरल का निवासी माना है। इसका कारण यह बताया जाता है कि केरल में आज भी आर्यभट्ट द्वारा निर्मित कैलेंडर पद्धति का उपयोग किया जाता है, जिससे अनुमान होता है कि आर्यभट्ट प्रथम वहाँ के निवासी रहे होंगे। आर्यभट्ट प्रथम को बीजगणित का जन्मदाता माना जाता है। वर्तमान में जिन विधियों से हम वर्गमूल तथा घनमूल ज्ञात करते हैं वे आर्यभट्ट प्रथम द्वारा आविष्कृत विधियों के लघुरूप ही हैं। आर्यभट्ट प्रथम ने π का सही मान ज्ञात किया तथा विश्व में सबसे पहले इस कठिन समस्या को हल किया।

ब्रहागुप्त

आर्यभट्ट प्रथम तथा वराहमिहिर के पश्चात ब्रहागुप्त का नाम महान गणितज्ञों की श्रेणी में आता है। इनका जन्म 598 ई. में सिंध प्रान्त (पाकिस्तान) में हुआ था, किंतु इनका कार्यक्षेत्र उज्जैन नगरी रहा जहाँ उन्होंने गणित एवं ज्योतिष संबंधी ग्रंथ लिखे। इनके प्रसिद्ध ग्रंथ 'खण्ड साधक' तथा 'ब्रहास्फुट सिद्धांत' हैं। इन्होंनें अंकगणित, बीजगणित तथा रेखागणित आदि शाखाओं पर महत्वपूर्ण कार्य किया। 'ब्रहास्फुट सिद्धांत' में इन्होंने ज्योतिष विद्या से संबंधित सामग्री प्रचुर मात्रा में लिखी है। बीजगणित में इन्होंने ऋण संख्याओं के संबंध में कुछ नियमों का वर्णन किया है और द्विघाती समीकरणों के हल दिए हैं। भिन्न लिखने की वर्तमान विधि ब्रहागुप्त की ही देन है, जिसका आज भी प्रचलन है।

भास्कराचार्य

भारतीय गणित में भास्कराचार्य नाम से दो प्रसिद्ध गणितज्ञ हुए हैं। भास्कराचार्य प्रथम, आर्यभट्ट प्रथम के पश्चात पैदा हुए थे। हम जिस भास्कराचार्य के बारे में अभी अध्ययन करेंगे वे भास्कराचार्य द्वितीय के नाम से प्रसिद्ध हैं तथा वे भास्कराचार्य प्रथम से कई शताब्दियों पश्चात् पैदा हुए। इनकी पुस्तक का नाम 'सिद्धांत शिरोमणि' है। इनका जन्म मैसूर प्रांत में एक गाँव में हुआ था, जिसका नाम बिज्जड बिड बताया जाता है, जो बीजापुर के पास माना जाता है। इनकी प्रसिद्ध पुस्तक 'सिद्धांत शिरोमणि' की रचना 1150 ई. में हुई, जब वे 36 वर्ष के थे। भास्कराचार्य के गुरु उनके पिता ही थे। भास्कराचार्य का युग ज्योतिष विद्या का युग माना जाता है। 'सिद्धांत शिरोमणि' चार भागों में विभाजित है तथा ये चार भाग अनेक अध्यायों में निबद्ध हैं। प्रथम खण्ड 'लीलावती' या 'पाटी-गणित' के नाम से प्रसिद्ध है। लीलावती की विश्व के विद्वानों ने भूरि-भूरि प्रशंसा की है। 'लीलावती' में भास्कराचार्य ने 278 पद्य लिखे हैं तथा समीकरण संबंधी समस्याओं को अत्यंत ही रोचक ढंग से प्रस्तुत किया है। भास्कराचार्य ही विश्व के प्रथम गणितज्ञ थे, जिन्होंने किसी संख्या में 0 से भाग देने पर परिणाम में

अनंत की कल्पना की तथा गणित जगत की एक अत्यंत कठिन समस्या का हल सोच निकला। भास्कराचार्य ने 1150 ई. में अपनी कृति 'बीजगणित' में लिखा है, "किसी ऋणात्मक राशि का वर्गमूल नही होता, क्योंकि यह एक वर्ग नहीं होती।"

श्रीनिवास रामानुजम

भारत के इस मेधावी एवं प्रतिभा के धनी गणितज्ञ का जन्म 22 दिसम्बर, 1887 को मद्रास के तंजोर जिले में स्थित इरोद नाम के छोटे से गाँव में हुआ था। रामानुजम के पिता एक निर्धन ब्राह्मण परिवार के थे। बालक रामानुजम को गणित से बेहद प्रेम था। इन्होंने छोटी आयु में जो गणित संबंधी मौलिक कार्य कर दिखाया वह बड़े-बड़े गणितज्ञ अपने संपूर्ण जीवन काल में भी शायद न कर सकें। रामानुजम को शुद्ध गणितज्ञों की श्रेणी में ऊँचा स्थान दिया गया है। उनका महत्वपूर्ण योगदान संख्या सिद्धांत का क्षेत्र है। रामानुजम की स्मरण शक्ति आश्चर्यजनक थी। प्रथम 10,000 पूर्णांकों में से प्रत्येक अंक की विचित्रता के बारे में उनको अनेक बातें ज्ञात थी। रामानुजम यह सिद्ध करने में सफल हुए कि प्रत्येक बड़ी संख्या को अधिक से अधिक चार अभाज्य संख्याओं के रूप में लिखा जा सकता है।

पाश्चात्य गणितज्ञ

यूक्लिड (Euclid)- यूक्लिड का जन्म अलैक्जैन्ड्रिया (Alexanderia) में 300 ई.पू. के लगभग हुआ था। इनकी प्रारम्भिक शिक्षा एथेन्स में हुई थी। यूक्लिड का सबसे प्रसिध्द ग्रन्थ एलिमेंट्स (Elements) है जिसके अब तक एक हजार से अधिक संस्करण हो चुके हैं। इस ग्रन्थ में उन्होंने सर्वागसमता, समानता, बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ, क्षेत्रफल,वृत्त,समानुपात,ठोस ज्यामिति आदि विषयों का उल्लेख किया है। इसके अलावा यूक्लिड ने डेटा (Data), आकृतियों का विभाजन, स्यूडेरिया(Pseudaria), शांक्व(Conic), पोरिज्म्स (Porisms) तथा तल बिंदु (Surface Loci) जैसे महत्वपूर्ण ग्रन्थों की रचना करके गणित के क्षेत्र में महत्वपूर्ण योगदान दिया।

पाइथागोरस (Pythagorous)- पाइथागोरस का जन्म ग्रीस के निकट एशियन सागर के मध्य सामोस नामक स्थान पर 580 ई.पूर्व हुआ था। इनके गुरु का नाम थेल्स था जो कि यूनान के महान विद्वान थे। इन्होनें एक प्रमेय की रचना की जिसे 'पाइथागोरस प्रमेय' के नाम से जाना जाता है। इस प्रमेय में यह स्पष्ट किया गया है कि किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं अर्थात लम्ब और आधार पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। पाइथागोरस ने कुछ संख्याओं को त्रिभुज का नाम दिया है। 1,3,6 और 10 आदि त्रिभुज संख्यायें थी। पहली दो संख्याओं का योग $1 + 2 = 3$ प्रथम त्रिभुज संख्या, पहली तीन संख्याओं का योग $1 + 2 + 3 = 6$ द्वितीय त्रिभुज संख्या तथा प्रथम चार संख्याओं का योग $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ तीसरी त्रिभुज संख्या कहलाती थी। पाइथागोरस स्कूल जो कि उनके समर्थकों द्वारा स्थापित किया गया था। इस स्कूल के गणितज्ञों ने अनेक गणितीय शब्दों जैसे- मैथमेटिक्स, परवलय (Parabola), इलिप्स अपरवलय (Hyperbola) आदि की खोज की। इस प्रकार गणित इतिहास में पाइथागोरस का योगदान विशेष महत्त्व रखता है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

1. भारतीय गणितज्ञों के नाम व काल की सूची बनाएँ व इनके ग्रंथ के नाम लिखें।

.....
.....
2. गणित के इतिहास पर प्रकाश डालें।
.....
.....

1.4.0 गणित का अर्थ-

गणित शब्द का शाब्दिक अर्थ है, "वह शास्त्र जिसमें गणना की प्रधानता हो।" इसको अंतरिक्ष और गणनात्मक विज्ञान की परिभाषा के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। यह युक्तिसंगत तर्क की आंकिक समस्याओं की विज्ञान है। यह अंतरिक्ष में व्याप्त समस्याओं तथा गणनात्मक तथ्यों और संबंधों का व्यावहारिक पक्ष है। लिन्डसे ने कहा है, "गणित भौतिक विज्ञानों की भाषा है और निश्चय ही मानव मस्तिष्क में उत्पन्न इससे उत्तम अन्य कोई भाषा नहीं है।"

1.4.1 गणित का क्षेत्र-

गणित एक ऐसा विषय है, जिसकी व्यापकता सार्वभौम है। प्रकृति के अनगिनत व्यवहार समझना गणित की सहायता से ही संभव है। गणित विज्ञान एवं तकनीकी का मेरुदण्ड है। अत: वेदांग ज्योतिष में ऋषि लगध ने लिखा है:

यथा शिखा मयूराणाम् नागानाम् मणयो यथा।
तद्वद वेदांग शास्त्राणाम् गणितम् मूर्ध्निस्थितम्।।

अर्थात, सभी वेदांग शास्त्रों के शीर्ष पर गणित उसी प्रकार सुशोभित है, जैसे मोर के सिर पर शिखा तथा सर्प के फन पर मणि।

गणित के इतिहास पर दृष्टि डालने पर हम पाते हैं कि गणित में भारत का योगदान अत्यंत विशिष्ट एवं विश्व प्रसिद्ध है। प्राचीन काल से ही भारत में गणित की विभिन्न शाखाओं में कार्य किया गया है। अंक गणित, गणित की प्रमुख शाखा है। दैनिक व्यवहार में इसका सर्वाधिक उपयोग है। जैसे- घर, रसोई, बाजार.....हम कहीं भी जाए वृत्त, आयत, वर्ग, अर्धवृत्त, शंकु, घन, त्रिभुज, चतुर्भुज, समांतर रेखा, आदि के दृश्य दिखाई पड़ते हैं। हमारा जीवन अंकविधा में निमग्न है। प्रतिदिन सैकड़ों बार जोड़, घटाना, गुणा, भाग को काम में लेते हैं। वैज्ञानिक प्रगति का मूल आधार गणित ही है। गणित का क्षेत्र बहुत ही व्यापक है। जीवन के हर क्षेत्र से यह जुड़ा हुआ है।

1.4.2 गणित की प्रकृति (Nature of Mathematics):

1) भाषा(language)- गणित की भाषा सार्वभौमिक है। भाषा से तात्पर्य- पद, संकल्पनाएँ (concepts), सूत्र(Formulae), संकेत(Symbols), सिद्धांत(Principles), प्रक्रियाएँ(Processes) आदि। विश्व के सभी

विद्यालयों में गणित की लगभग सामान्य विषय वस्तु पढ़ाई जाती है। यह एक जीवंत भाषा है। इसके माध्यम से संभावनाओं को व्यक्त किया जा सकता हैं।

2) सामंजस्यता(Consistency)- गणित की विषयवस्तु में संगति/सामंजस्य(Consistency) होता है। गणित में एक प्रकार की निश्चितता है, जिसके कारण चिंतन में होने वाली संभावित त्रुटियाँ कम हो जाती हैं।

3) गूढ़ता(Rigour)- गणित की प्रकृति में गूढ़ता है। प्रत्येक गणितीय कथन का निश्चित आधार होता है।

4) गणित **संरूपों(Patterns) का अध्ययन** है।

5) गणित एक **अमूर्त (Abstract) विषय** है। गणित को अमूर्त विचारों एवं आकृतियों का विज्ञान कहा जाता हैं।

6) परिणामों की निश्चितता (Certainty of result)- गणित के निष्कर्ष निश्चित एवं तर्कसंगत होते हैं। इन निष्कर्षों को सत्यापित किया जा सकता हैं।

7) गणित की विषय वस्तु में **क्रमबद्धता तथा व्यवस्था** है। गणित सिखाने के लिए निश्चित क्रमद्धता को आधार बनाया जाता है।

8) आधुनिक गणित ने **समुच्चयात्मक स्वरूप** को स्वीकार किया है। समुच्चय (Sets) ही नवीन गणित का महत्वपूर्ण आधार है।

9) गणित की प्रकृति **विकासात्मक/उन्नतिशील (Developmental)** है। गणित का ज्ञान शिक्षक और विद्यार्थी दोनों को और अधिक जानकारी के लिए प्रेरित करता हैं।

10) शुद्धता (Accuracy)- गणित का महत्वपूर्ण आधार शुद्धता है। अन्य विषय जहाँ न्यूनतम विचलन को स्वीकार भी लेते है, वहीं गणित इस प्रकार की स्वीकृति हेतु किसी भी स्थिति में तैयार नहीं होता हैं।

11) सामान्यीकरण (Generalization)- गणित में सामान्यीकरण, आगमन, निगमन, अमूर्तन आदि मानसिक क्रियाओं की सहायता से सिद्धांतों, प्रक्रियाओं, सूत्रों आदि को गणितीय भाषा में प्रकट किया जाता हैं।

12) स्वत: सिद्ध (Axiomatic) – गणित में स्वत: सिद्धियों की सहायता से नए सिद्धांतों का प्रतिपादन किया जाता हैं।

अपनी प्रगति की जाँच करें

3. गणित की प्रकृति को स्पष्ट करें।

.....

.....

1.5.0 गणित शिक्षण के उद्देश्य और प्राप्य उद्देश्य

उद्देश्य तथा प्राप्य उद्देश्यों को प्राय: समान अर्थ में लिया जाता है, जो कि भ्रम मात्र ही है। एक उद्देश्य की प्राप्ति हेतु कई प्राप्य उद्देश्यों की प्राप्ति करनी होती है। इस प्रकार एक विशेष उद्देश्य के कई प्राप्य उद्देश्य हो सकते है। अत: प्राप्य उद्देश्य गणित शिक्षण के व्यापक उद्देश्यों पर ही आधारित होते हैं तथा छात्रों में वांछनीय व्यवहारगत परिवर्तन लाने में सहायक होते हैं।

उद्देश्य	प्राप्य उद्देश्य
1. उद्देश्यों का क्षेत्र व्यापक या असीमित होता है।	1. इसका क्षेत्र संकुचित या सीमित होता है।
2. इसकी अवधि दीर्घकालीन होती है।	2. इसकी अवधि अल्पकालीन या तत्कालीन होती है।
3. उद्देश्य अस्पष्ट तथा अनिश्चित होते हैं।	3. ये निश्चित तथा स्पष्ट होते हैं।
4. इनकी प्राप्ति में विद्यालय, समाज तथा संपूर्ण राष्ट्र ज़िम्मेदार होता है।	4. इनको प्राप्ति की ज़िम्मेदारी प्राय: शिक्षक की ही होती है।
5. इनकी प्राप्ति का मापन एवं मूल्यांकन संभव नहीं है।	5. इनका मापन एवं मूल्यांकन किया जा सकता है।
6. इनका संबंध शिक्षा तथा भविष्य से होता है।	6. इनका संबंध किसी विशेष प्रकरण से ही होता है।
7. इनमें प्राप्य उद्देश्य समाहित होते है।	7. जबकि ये उद्देश्य का ही एक भाग होते है।
8. इनमें व्यक्तिनिष्ठता होती है।	8. इनमें वस्तुनिष्ठता होती है।

1.6.0 गणित का अन्य विषयों के साथ संबंध

कांट के अनुसार, "विज्ञान उतना ही यथार्थ है, जितना वह गणित का प्रयोग करता है।" विज्ञान ही नहीं, गणित का अन्य विषयों के अध्ययन में भी उपयोग होता है। अन्य विषयों की शिक्षा आरंभ करने से पूर्व छात्रों को इसी कारण गणित पढ़ाया जाता है। भूगोल, अर्थशास्त्र, वाणिज्य, मनोविज्ञान तथा समाजशास्त्र के अध्ययन में गणित का ज्ञान आवश्यक है।

1.6.1 गणित एवं भौतिकशास्त्र

इस कथन में संदेह नहीं हैं कि भौतिक विज्ञान के विकास के कारण ही आज समाज में लोगों का जीवन स्तर ऊँचा हुआ है। वर्तमान युग में विज्ञान उन्नति के इस शिखर पर नहीं पहुँचता यदि उसे गणित का अवदान प्राप्त नहीं होता। गणित के कारण इस विषय में सही मापन एवं मूल्यांकन संभव हुआ है। जब एक वैज्ञानिक किसी प्रयोगशाला में काम करता है, तो भौतिक तथ्यों का अध्ययन गणित की सहायता से ही करता है तथा गणित के सूत्रों द्वारा नए सिद्धांतों का प्रतिपादन करता है। न्यूटन एवं आइन्स्टीन, जिन्होंने पृथ्वी की आकर्षण शक्ति के विभिन्न सिद्धांतों को गणित के सूत्रों में अभिव्यक्त किया, स्वयं दोनों महान गणितज्ञ थे। भौतिक विज्ञान के सैद्धांतिक पक्ष का एक महत्वपूर्ण भाग संख्यात्मक होता है। संख्यात्मक पक्ष में गणित का अधिकाधिक प्रयोग होता है।

1.6.2 गणित एवं रसायनशास्त्र

रसायनशास्त्र में रासायनिक क्रियाओं के परिणामों का मान गणित की सहायता से ज्ञात किया जाता है। यौगिक, मिश्रण, रासायनिक समीकरण आदि वस्तुत: गणितीय संकल्पनाएँ हैं, जिनमें परिणाम का पक्ष महत्वपूर्ण है। रसायनशास्त्र के विभिन्न उपविषयों को समझने के लिए गणित का ज्ञान आवश्यक है। अन्यथा इसमें परिणामों

से संबंधित पक्षों को समझने में कठिनाइयों का सामना करना पड़ेगा। यहाँ पर यह बताना भी आवश्यक है कि रसायनशास्त्र और अनेक प्राकृतिक विज्ञानों की भाषा भी अधिकांशत: गणितीय है।

1.6.3 गणित एवं प्राणिविज्ञान तथा वनस्पति शास्त्र

प्राणी एवं वनस्पति विज्ञान के विद्यार्थियों के लिए भी गणित का ज्ञान आवश्यक है। गणित के ज्ञान बिना छात्रों को इन विचारों के अध्ययन में कठिनाई होगी। किसी जीव की हड्डियों, नाड़ियों आदि की संख्या, हड्डियों की लंबाई, हड्डियों का परस्पर अनुपात, हड्डियों का भार आदि ज्ञात करने के लिए अंकगणित का ज्ञान आवश्यक है। कोशिकाओं का अध्ययन करते समय छात्रों के लिए वर्ग, वृत्त, बहुभुज क्षेत्र आदि का ज्ञान आवश्यक है। इस संदर्भ में ज्यामिति का अध्ययन सहायक सिद्ध होता है। मेंडल के सिद्धांत को समझाने के लिए गणित की सहायता लेना जरूरी है। इसी प्रकार वनस्पतिशास्त्र में भी गणित के आधारभूत सिद्धांतों का ज्ञान सहायक होता है। फूल, पत्ती, जड़ आदि के अध्ययन में गणित की अनेक क्रियाओं का प्रयोग किया जाता है। वनस्पतिशास्त्र में घनत्व, वितरण, आवृत्ति, क्षेत्रफल आदि प्रत्ययों का भी प्रयोग किया जाता है।

1.6.4 गणित एवं अर्थशास्त्र

आजकल अर्थशास्त्र का अध्ययन बड़ा महत्वपूर्ण हो गया है। अर्थशास्त्र के नियमों में गणित द्वारा ही निश्चितता का लाना संभव हो सका है। अब तो यह स्थिति आ गई है कि अर्थशास्त्र के विद्यार्थी के लिए गणित का समुचित ज्ञान अनिवार्य हो गया है। अर्थमिति (Econometrics) अर्थशास्त्र की एक महत्वपूर्ण शाखा है, जिसमें गणित एवं सांख्यिकी का उपयोग होता है। अर्थशास्त्र में अनेक विषय हैं, जिनका गणित के उपयोग के बिना उचित स्पष्टीकरण नहीं हो सकता है। उदाहरण के लिए- उपयोगिता, माँग एवं पूर्ति, राष्ट्रीय आय, मूल्य निर्धारण, पारिवारिक बजट, सूचकांक, विदेशी व्यापार, आर्थिक नियोजन, मुद्रा स्फीति, मुद्रा अवमूल्यन, विदेशी विनिमय दर, निवेश विश्लेषण, कर निर्धारण, सार्वजानिक ऋण, जनसंख्या आदि आर्थिक विषयों का विवेचन, स्पष्टीकरण एवं शुद्धता के लिए गणित का उपयोग आवश्यक है।

1.6.5 गणित एवं वाणिज्य

सामाजिक जीवन पर वाणिज्य का महत्वपूर्ण प्रभाव पड़ता हैं। उत्पादन, लागत निर्धारण, विज्ञापन, भावी माँग का निर्धारण और तदनुसार उत्पादन की मात्रा का निर्धारण, लाभ-अनुपात, लागत विधियाँ तथा लागत विश्लेषण, गत वर्षों के उत्पादन, वर्तमान उत्पादन, लागत तथा लाभों की तुलना तथा इनका हिसाब-किताब रखना, व्यापार में सहायक यंत्रों जैसे- यातायात, संवाद, वाहन के साधन, बैंक और बीमा आदि की प्रगति का लेखा-जोखा रखना -सब वाणिज्य के अंतर्गत आते हैं। हिसाब-किताब रखना, जिसे वाणिज्य की भाषा में लेखा-कर्म कहते हैं, पूर्णतया अंकगणित का क्षेत्र है। इन लेखों का विश्लेषण करना, जिसे अकाउंटेंसी कहते है।

1.6.6 गणित और मनोविज्ञान

आधुनिक मनोविज्ञान में मापन प्रक्रिया के उपयोग के कारण गणित का ज्ञान होना आवश्यक हो गया है। मनोविज्ञान के छात्र के लिए औसत, प्रतिशत, अनुपात, लेखाचित्र का साधारण ज्ञान तो अत्यंत आवश्यक है। मनोविज्ञान में गणना, परीक्षण, मापन, तुलना तत्वों का अध्ययन, प्रमापीकरण, निदान, उपचार- आदि पक्षों में गणित का बहुतायत से प्रयोग होता है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

4. गणित का अन्य विषयों के साथ सहसंबंध बताएँ।

.....

.....

1.7.0 पैटर्न की रचना जानना व सामान्यीकरण के रूप में गणित का अध्ययन

गणित सीखने और सिखाने में पैटर्न की भूमिका महत्वपूर्ण हो जाती है। गणित में पैटर्न को हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते है- आकृतियों या संख्याओं का ऐसा क्रम/श्रेणी जो किसी विशेष प्रकार के संबंधों से एक दूसरे से जुड़े होते हैं या जिनका एक निश्चित अंतराल पर दुहराव होता हो। कहा जाता है कि पैटर्न को जानना गणित सीखने का प्राथमिक आधार है। पैटर्न की सहायता से हम गणित को रोचक तरीके से सीख सकते है। हम अपने आस-पास की घटने वाली घटनाओं, आकृतियों और संख्या पद्धति सीखते समय संख्याओं का पैटर्न, गणित सीखने की उत्सुकता को और बढ़ा देता है। कुछ पैटर्न हम प्रत्यक्ष देख पाते हैं, महसूस कर पाते हैं परंतु कुछ पैटर्न अमूर्त होते हैं, जिन्हें समझने के लिए हमें अपना चिंतन स्तर बढ़ाना पड़ता है। गणित सीखने में पैटर्न का ज्ञान काफ़ी हद तक सहायक होता है। गणित में कई प्रकार के पैटर्न हो सकते हैं, जिससे हमारी तर्क-शक्ति बढ़ती है। कुछ पैटर्न इस प्रकार है-

1.7.1 आकृतियों का पैटर्न- आकृतियों का वह समुच्चय जो एक निश्चित श्रेणी में व्यवस्थित हो, आकृतियों का पैटर्न होगा।

1.7.2 सांख्यकीय पैटर्न- सांख्यकीय पैटर्न से तात्पर्य 'संख्याओं के पैटर्न से है'। संख्याएँ किसी विशेष रूप से एक निश्चित श्रेणी में व्यवस्थित हों तथा किसी-न-किसी तरह से गणितीय संक्रियाओं से जुड़ी हुई हों, सांख्यकीय पैटर्न का निर्माण करेंगी। जैसे- $11^2 = 121$; $111^2 = 12321$; $1111^2 = 1234321$; एक सांख्यकीय पैटर्न का उदाहरण है।

1.7.3 अमूर्त पैटर्न- कुछ पैटर्न ऐसे होते हैं, जिनकी पहचान मुश्किल होती है और हम उनकी पहचान भिन्न तरह के तार्किक चिंतन के आधार पर करते है। पैटर्न का विश्लेषण करने पर हम पाते हैं कि गणित पैटर्न का विज्ञान है।

1.8.0 गणित : मानव द्वारा रचित एक विषय

बहुत लोगों का कहना है कि गणित मानव रचित नहीं है, यह प्रकृति प्रदत्त है। संख्या पद्धति के विषय में भी यही कहा जाता है, परंतु यह सत्य प्रतीत नही होता है। **गणितीय संरचना** माध्यमिक स्तर तक पढ़ाई जाने वाली गणित वह आधारभूत संरचना हैं, जिस पर केवल गणितीय विज्ञान ही नहीं, बल्कि भौतिक विज्ञान,

सामाजिक विज्ञान और विश्वविद्यालय तथा तकनीकि संस्थाओं में पढ़ाए जाने वाले विज्ञान विषयों की संपूर्ण अधिरचना आधारित है। आधुनिक वैज्ञानिक युग में भौतिक शास्त्री, इंजिनीयर, जीव वैज्ञानिक, शरीर वैज्ञानिक, समाजशास्त्री यहाँ तक कि औद्योगिक प्रबंधक इत्यादि सभी की गणित में रुचि तेजी से बढ़ती जा रही है, क्योंकि यह अत्यंत उपयोगी विषय है। इसलिए गणितीय संरचना को गणित के शिक्षक को जानना अति आवश्यक है।

1.8.1 गणितीय संरचना की निर्माण प्रक्रिया

वस्तुत: सभी प्रकार के गणित का मूल प्रकृति में है। अंक गणित और बीज गणित का विकास मनुष्य के दिन-प्रतिदिन के जीवन में गिनने, वित्तीय प्रबंधन और अन्य सरल क्रियाओं की आवश्यकता के कारण हुआ। ज्यामिति और त्रिकोणमिति, ज्योतिष (खगोलशास्त्र), सर्वेक्षण, भूमि-मापन की समस्याओं के कारण विकसित हुई और कलन (Calculus) का आविष्कार भौतिकी की कुछ आधारभूत समस्याओं के हल प्राप्त करने के लिए किया गया। हाल में सामाजिक विज्ञानों, वाणिज्य, जीव विज्ञान और युद्ध स्थिति का सामना करने के लिए नए तरह के गणित का आविष्कार किया गया और आगे भी इसी प्रकार मानव के अन्य प्रयत्नों की सफलता के लिए नये गणित क्षेत्रों का विकास निश्चित हैं। आवश्यकता आविष्कार की जननी है और गणित इससे अलग नहीं है। संरचनाओं के निर्माण की इस प्रकार की प्रक्रिया में मुख्यत: ये पद होते हैं-

1. प्रकृति के गणितीय मॉडल की रचना- पहले हमारा प्रकृति के प्रति अभिगम विवरणात्मक होता है, परंतु जैसे-जैसे हम उसके बारे में अधिक से अधिक ज्ञान प्राप्त करते जाते हैं और उसके विभिन्न भागों के बीच संबंध देखते जाते है तो हम प्रकृति के गणितीय मॉडल की रचना आरंभ करते है। यह एक अत्यंत सृजनात्मक पद है, जिसके लिए गूढ़ अंतर्दृष्टि और लगन की आवश्यकता है। गणितीय मॉडल बनाने में हम जिन शब्दों का प्रयोग करते है, उनका अर्थ निश्चित करते हैं और ऐसे स्वयं-तथ्यों (axiom) का विकास करते हैं, जो हमारे गणितीय सिद्धांत की नींव बनेगा। संभवत: आप ज्यामिति में इस प्रकार की संरचनात्मक प्रक्रिया से अधिक परिचित होंगे, जिसमें स्वयं-तथ्य उन दृश्यों के अमूर्त विवरण हैं, जो मानव ने उस समय देखे जब उसने धरती का मापन शुरू किया।

2. संग्रहित (Selected) स्वयं-तथ्यों से निष्कर्ष निकलना तथा प्रमेयों का निर्माण- इसमें निगमन की तार्किक विधि का प्रयोग करते हुए हम प्रमेय पर पहुँचते है। यह प्रमेय हमारे स्वयं तथ्यों से निकाले गए तार्किक निष्कर्षों के अलावा और कुछ नहीं है और उन्हें ऐसे संबंधों, जो आवश्यक रूप से प्रकृति में सत्य है, का दृढ़कथन (firm statement) नहीं मान लेना चाहिए। इन प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए हमें तर्कशास्त्र के नियमों को और उन विधियों, जिनसे गणितीय प्रमाणों का निर्माण किया जाता है, का ज्ञान होना आवश्यक हैं।

3. प्रमेयों का सत्यापन- प्रमेयों को सिद्ध करने के बाद हम प्रकृति में उनका प्रयोग ढूँढते हैं। हम उन प्रश्नों को जो, हमारे खोज के बीच आते है, हल करते है तथा उनका संख्यात्मक उत्तर प्राप्त करते हैं।

1.8.2 स्वयंसिद्ध तथ्य/स्वयंसिद्धियाँ

"गणित के किसी भी तंत्र, तर्क, कथन अथवा प्रकथन को, जिससे द्वितीयक तर्क, कथन या प्रकथन निष्पादित किए जाते हो, स्वयंसिद्ध तथ्य कहलाते हैं।" आदिकाल में स्वयंसिद्ध तथ्य वह कथन माना जाता था,

जो अपना प्रमाण स्वयं ही होता था और उसके लिए किसी अलग प्रमाण की आवश्यकता नहीं थी। आधुनिक गणित में इस धारणा में कुछ संशोधन करके स्वीकार किया गया है। आधुनिक गणित "स्वयंसिद्धियाँ वह मान्यता या कथन है, जिसका प्रयोग किसी अन्य क्रमबद्ध तंत्र के विकास में सुविधा के लिए किया जाता है।" दूसरे शब्दों में, "स्वयंसिद्ध तथ्य वह कथन है, जिसका प्रयोग बिना प्रमाण के किया जा सके।"

यूक्लिड के स्वयंसिद्ध तथ्य-

1. संपूर्ण, अपने किसी भाग से सदा बड़ा होता है।
2. अगर समान राशियों में समान राशि जोड़ी जाए तो परिणाम समान रहता है।

पिआनो के स्वयं सिद्ध तथ्य- प्रसिद्ध इतालवी गणितज्ञ पिआनो (1858-1932) ने गणित के कुछ आधारभूत स्वयंसिद्ध तथ्य प्रस्तुत किए, जो इस प्रकार है-

1. किसी भी संख्या के बाद दूसरी संख्या आती है।
2. किसी एक संख्या के पश्चात् दो संख्याएँ इकठ्ठा नहीं आ सकती।
3. शून्य एक संख्या है।
4. शून्य किसी संख्या के बाद नहीं आता।

गणित की किसी भी शाखा की आधारभूत प्रमेयों और परिभाषाओं में अनेक स्वयंसिद्ध तथ्य सम्मिलित हैं। अंकगणित, बीज गणित और रेखा गणित की नींव इन्हीं स्वयंसिद्ध तथ्यों व अभिगृहितों से विकसित की गई हैं।

गुणन के स्वयंसिद्ध तथ्य-

1. किन्हीं दो पूर्णांक का गुणनफल एक अद्वितीय राशि होती है।

$$axb = bxa \text{ या } 5 \times 4 = 4 \times 5$$

इसका अर्थ है कि पाँच का चार गुणा और चार का पाँच गुणा बराबर होते हैं। यह किन्हीं भी दो राशियों के लिए हमेशा सत्य होता है। (यहाँ यह बताना कठिन है कि इन राशियों का गुणनफल सदैव एक जैसा क्यों आता है। अत: यह स्वयंसिद्ध तथ्य है।)

2. गुणन में क्रमविनिमेय नियम सत्य है।

$$(3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5)$$

$$\text{या } (ab)c = a(bc)$$

1.8.3 अभिगृहीत

गणित में परिभाषाओं व तर्कों के आधार पर क्रमश: आगे बढ़कर हम नये निष्कर्षों एवं तथ्यों पर पहुँचते हैं कि किसी भी नियम अथवा प्रमेय को सिद्ध करने हेतु हमें तर्कों और उपनियमों का सहारा लेना पड़ता है। अगर हम ध्यानपूर्वक सोचें तो पाएँगे कि सभी परिभाषाएँ और उपनियम कुछ प्राथमिक तथ्यों से उत्पन्न किए गए है, अर्थात प्रत्येक नया प्रमाण पिछले प्रमाण पर आधारित है। इस तरह यदि हम क्रमश: पीछे की ओर बढ़ते जाएं, तो अंत में एक ऐसे कथन पर पहुँचेंगे, जिसके लिए कोई प्रमाण जुटाने की आवश्यकता ही मालूम नहीं पड़ती। ऐसे तथ्यों को अभिगृहीत कहते हैं। यूक्लिड के समय से ही इन अभिगृहीतों को सच समझा जाता रहा है, क्योंकि गणितीय रचनाओं एवं उत्पत्तियों के लिए ये आवश्यक हैं। इनमें से कुछ अभिगृहित निम्नलिखित हैं-

1) किसी ऐसे बिंदु से होकर जो कि दी हुई रेखा पर न हो, उस रेखा के समांतर केवल एक ही रेखा खींची जा

सकती है।

2) किसी भी एक बिंदु से किसी अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींची जा सकती है।

3) किसी दिए हुए बिंदु से कोई निश्चित त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

4) सभी समकोण आपस में बराबर होते है। उपर्युक्त तथ्यों के आधार पर अभिगृहीत को निम्न परिभाषा दी जा सकती है– "किसी तंत्र या प्रणाली के वे प्रारंभिक कथन, जिनकी सत्यता तंत्र के अंतर्गत हम बिना किसी प्रमाण के स्वीकार कर लेते है, उस तंत्र को अभिगृहीत कहते हैं।" किसी तंत्र में अभिगृहीतों का प्रयोग प्रकथन तथा प्रमेयों को सिद्ध करने हेतु किया जा सकता है, लेकिन प्रत्येक तंत्र में अभिगृहीत उसके अनुरूप ही होते हैं और व्यक्ति को उनके चुनाव की पूरी स्वतंत्रता होती हैं। अभिगृहीतों के चुनाव में निम्नलिखित बातों का ध्यान आवश्य रखना चाहिए-

1) अभिगृहीतों में आंतरिक अवरोध न हो अर्थात वे स्वयं ही एक-दूसरे का खंडन करने वाले नही होने चाहिए।

2) किसी गणितीय संरचना में प्रयोग किए जाने वाले अभिगृहीत आपस में पूर्णत: स्वतंत्र होने चाहिए।

प्रकथन (Proposition)

प्रकथन का संबंध गणित की सभी शाखाओं से है। प्रकथन एक प्रकार के घोषित कथन होते हैं, जिन्हें तर्कशास्त्र के नियमों की सहायता से प्रमाणित करने की चेष्टा की जाती है।

1) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय योग के लिए बंद है।

2) किसी रेखा पर दिए गए किसी बिंदु पर केवल एक ही लंब खींचा जा सकता है।

3) यदि $y= x^2$ है तो $dy/dx=2x$.

उपरोक्त कथन सत्य है, लेकिन ये असत्य भी हो सकते हैं। जैसे- विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय योग के लिए बंद है।

प्रकथन का सत्यमान

किसी प्रकथन के सत्य अथवा असत्य होने को हम उसको सत्यमान कहते हैं। अगर कोई प्रकथन सत्य हो तो उसके सत्यमान को T से तथा असत्य हो तो F से प्रदर्शित करते है।

उदाहरण-

1) $8>5$: Truth Value= T

2) $d(x^3)/dx = x^2$: Truth Value= F

3) $x^{-3} = -27$, का तीन घनमूल है, जो कि अपने आप में एक पूर्ण संख्या है। : Truth Value= T

संयुक्त प्रकथन

एक से अधिक प्रकथनों को मिलाकर बनाए गए प्रकथन को संयुक्त प्रकथन कहते हैं। युति, वियोजन, परिणाम, तुल्यता संयुक्त प्रकथनों के विभिन्न रूप हैं-

अ) युति- यदि कोई दो प्रकथनों को संयोजक 'और' द्वारा संयुक्त करके एक संयुक्त प्रकथन बनाया जाए, तो उसे युति कहा जाता है। अर्थात- **यूक्लिड** के कथन, "There is no royal road to Geometry" की आज के इस बाल मनोविज्ञान युग में भले ही आलोचना की जाती हो, लेकिन ज्यामिति के अध्ययन में

जिस निश्चित व्यवस्थापन पर यूक्लिड ने बल दिया उसे विषय के विकास में एक महान योगदान माना जाएगा। ज्ञान वृद्धि एवं युग परिवर्तन के साथ-साथ विषय संबंधी शिक्षण प्रक्रियाओं और मान्यताओं में अंतर आना स्वाभाविक है। इस दृष्टिकोण से यदि आज प्राचीन मान्यताओं के स्थान पर नवीन दृष्टिकोण पनप रहा हैं तो इससे यूक्लिड के अपने सौरभ में किसी प्रकार की कमी नहीं आ सकती। उन्हें संसार के एक महान ज्यामिती विशेषज्ञ के रूप में हमेशा याद किया जाता रहेगा।

1.8.4 प्रमाण

गणितीय प्रमाण किसी गणितीय कथन का एक निगमनिक तर्कसंगत युक्ति होती है। इस तर्क में, पहले से स्थापित दूसरे कथन, जैसे प्रमेयों का भी प्रयोग कर सकते है। सिद्धांत से प्रमाण को अनुमानित एक निर्धारित निश्चित नियम के अनुरूप स्वीकार्य कथन के रूप में स्वीकार किया जाता है, जिसे स्वयंसिद्धि भी कहते है। प्रमाण निगमनिक तर्क का उदाहरण है और जिसे आगमनिक और आनुभविक तर्क से अलग किया जा सकता है। प्रमाण (Proof) शब्द लैटिन शब्द 'probare' से आया है, जिसका अर्थ होता है "जाँच करना"।

प्रमाण की विभिन्न विधियाँ

1) प्रत्यक्ष: प्रत्यक्ष प्रमाण में, निष्कर्ष स्वयंसिद्धियों, परिभाषाओं और पूर्व के प्रमेयों के आधार पर किया जाता है। उदाहरण के लिए- दो सम संख्याओं का योग हमेशा एक सम संख्या होती है। इसके लिए दो सम संख्याओं को क्रमश: $x=2a$ और $y= 2b$ लिखते है; दोनों का योग करने पर $x+y= 2a + 2b = 2(a+b)$ हुआ; अत: सम संख्या की परिभाषा से $2(a+b)$ एक सम संख्या है; इसप्रकार दो सम संख्याओं का योग एक सम संख्या होता है।

2) अप्रत्यक्ष: अप्रत्यक्ष प्रमाण के लिए हमें कुछ रचना करनी होती है।

3) विपरीत उदाहरण: यह दर्शाता है कि यदि कुछ कथन सत्य थे, पर एक तार्किक विरोधाभास होता है और फिर कथन को असत्य मान लिया जाता है। जैसे हम $\sqrt{2}$ को अपरिमेय साबित करते है।

4) आगमन के द्वारा प्रमाण: प्रमाण के इस विधि में हम कई उदाहरणों को शामिल करते है, यदि सारे उदाहरण सही साबित हो रहे हैं, तो दिया गया कथन सत्य होगा। इसके लिए पहले हम एक संख्या के लिए जाँच करते हैं, फिर $P(n)$ के लिए कथन सत्य है, तो $P(n+1)$ के लिए भी सत्य होता है। फिर यह n के सारे मान के लिए सत्य होगा।

अपनी प्रगति की जाँच करें

5. गणित में विभिन्न प्रकार के पैटर्न का उदाहरण दीजिए।

.....

.....

6. विभिन्न गणितीय संरचनाओ के बारे में संक्षेप में लिखिए।

.....

.....

1.9.0 दिन-प्रतिदिन प्रयुक्त गणित

गणित एक ऐसा विषय है, जिसका प्रयोग हम दिन-प्रतिदिन करते हैं। प्रकृति के अनगिनत व्यवहार गणित की सहायता से ही संभव है। गणित, विज्ञान एवं तकनीकी का मेरुदण्ड है। दैनिक व्यवहार में इसका सर्वाधिक उपयोग है। जैसे- घर, रसोई, बाजार..... हम कहीं भी जाए वृत्त, आयत, वर्ग, अर्धवृत्त, शंकु, घन, त्रिभुज, चतुर्भुज, समांतर रेखा, आदि के दृश्य दिखाई पड़ते हैं। हमारा जीवन अंकविधा में निमग्न है। प्रतिदिन सैकड़ों बार जोड़, घटाना, गुणा, भाग को काम में लेते हैं। वैज्ञानिक प्रगति का मूल आधार गणित ही है।

1.10.0 बहुसांस्कृतिक गणित

आज के विद्यार्थी को वास्तविक जीवन की समस्याओं का हल ढूँढने के लिए तैयार करना है। हम इसकी भविष्यवाणी कर रहे हैं कि आज तकनीकी के इस युग में उन्हें किस प्रकार के गणित की जरुरत है, पर आज इस बात की जरुरत है कि उसे रचनात्मक समस्या समाधान कर्ता बनाना है। हमें विद्यार्थियों में तार्किक चिंतन कौशल को बढ़ाने की जरूरत है ताकि वे भविष्य में सही निर्णय लेने में सक्षम हो सके। उसे इस जटिल संसार के चुनौतीपूर्ण समस्याओं के समाधान करने योग्य बनाना है। शिक्षक को चाहिए कि छात्रों में अंतरराष्ट्रीय दृष्टिकोण विकसित करें ताकि वह दूसरे संस्कृति से संबंधित लोगों के गणितीय अभ्यास को समझ सकें। गणित मानव जीवन में कई तरीके से प्रयुक्त होता है, चाहे विज्ञान का क्षेत्र हो, सामाजिक विज्ञान का क्षेत्र हो, कला हो या खेल। विद्यार्थियों को प्रेरित करना चाहिए कि गणित एक जीवन का अंग है, एक बढ़ता हुआ अनुशासन है, वे कुछ योगदान करें।

1.11.0 गणित में सौंदर्य सिद्धांत

गणित का अपना अनोखा सौंदर्य है। उसका सौंदर्य सरलता, पूर्णता आदि में निहित है। यंग ने स्पष्ट शब्दों में लिखा है, "जब गणित का अध्यापन उचित एवं स्थूल रूप से किया जाता है, तो बालक उसके सौंदर्य का आनंद लेने में समर्थ होता है।" गणित की समस्या को हल कर लेने के पश्चात् छात्र ख़ुशी महसूस करता है। इस प्रकार अपनी अप्रत्याशित उपलब्धि पाने पर उसे उसमें संतुष्टि, प्रेरणा तथा प्रसन्नता मिलती है। वास्तविक रूप से उसके मन में गणित की प्रशंसा करने की भावना का विकास हो जाता है। विभिन्न गणितीय खेल या पहेलियाँ बच्चों का केवल मनोरंजन ही नहीं करती, बल्कि बच्चों में आनंद की अनुभूति तथा गणित के ज्ञान की प्रशंसा करने की भावना भी अधिक प्रबल होती है। गणित शिक्षण में जिस शिक्षण सामग्री का प्रयोग किया जाए वह सुंदर और आकर्षक भी होनी चाहिए। यदि शिक्षण सामग्री आकर्षक न होगी तो छात्र उस ओर ध्यान न देंगे और वह अनुपयोगी सिद्ध होगी। अतएव शिक्षण सामग्री को तैयार करते समय भी उसके सौंदार्यात्मक भाव को महत्व दिया जाना चाहिए।

अपनी प्रगति की जाँच करें

7. दिन-प्रतिदिन प्रयुक्त गणित की सूची बनाएँ।

.....

.....

8. गणित के सौन्दर्यात्मक भाव को स्पष्ट कीजिए।

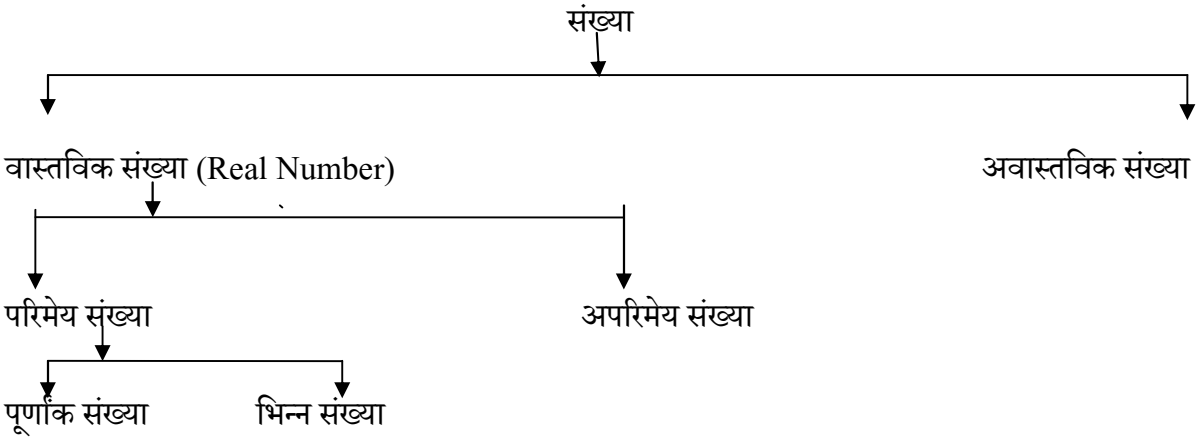
.....

.....

गणितीय संक्रियाएँ (Mathematical Operations)

संक्रिया- कोई भी वह क्रिया, जिससे दो या दो से अधिक संख्याएँ संयुक्त होकर किसी नयी संख्या में व्यक्त होती हैं, 'संक्रिया' कहलाती है। जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग गणितीय संक्रियायों के उदाहरण है।

संख्याओं का अध्यापन



*पूर्णांक संख्या धनात्मक (शून्य से बड़ा) और ऋणात्मक (शून्य से छोटा) दोनों होती है। शून्य न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक। पूर्णांक संख्या को सम संख्या और विषम संख्या में भी विभाजित करते है। धनात्मक पूर्णांक संख्या को हम प्राकृतिक संख्या (Natural Numbers) कहते है। प्राकृत संख्या के परिवार में शून्य को शामिल करने पर पूर्ण संख्या कहलाती है। पूर्ण संख्या (Whole Numbers) को रूढ़ संख्या या अभाज्य संख्या (Prime Numbers), सह-अभाज्य संख्या (Coprime numbers), मिश्र संख्या (Composite Numbers) में विभाजित करते है।

अलग-अलग संख्याओं का समूह अलग-अलग नियमों का पालन करती हैं:

1) समापन का नियम(closure Law): यदि दो भिन्न संख्याओं को संक्रिया करने के उपरांत परिणाम यदि उसी संख्या का हिस्सा रहती है, तो वह संख्या समापन के नियम का अनुसरण करती मानी जाती है। उदाहरण के लिए- 3 और 5 दोनों प्राकृत संख्या है और दोनों को जोड़ने पर परिणाम 8 आता है और वो भी प्राकृतिक संख्या ही है, तब हम कहते है कि प्राकृतिक सख्याओं का योग समापन के नियम का अनुसरण करती है।

2) क्रम विनिमय का नियम (Commutative Law): यदि किसी दो संख्या में कोई संक्रिया करने और उसका क्रम बदलकर संक्रिया करने पर प्राप्त परिणाम समान होता है तो हम कहते है कि संख्या क्रम विनिमय के नियम का अनुसरण करती है। उदाहरण के लिए: $3 + 5 = 5 + 3$.

3) साहचर्य का नियम (Associative law): यदि किन्हीं तीन संख्याओं a, b, c इस प्रकार हों कि

(a+b)+c=a+(b+c)

(ab)c=a(bc)

तो हम कहते है कि संख्या साहचर्य के नियम का अनुसरण करती है।

4) वितरण का नियम (Distributive law): यदि a, b, c तीन संख्याएँ इस प्रकार हों कि

ax(b+c) = ab+ac

ax(b-c) = ab-ac

तो हम कहते है कि संख्या वितरण के नियम का अनुसरण करती है।

1.12.0 सारांश

गणित एक ऐसा विषय है, जिसका प्रयोग हम दिन-प्रतिदिन करते है। गणित मनुष्य जीवन का गणनात्मक पक्ष है जिसमें जीवन से संबंधित वस्तुओं के बारे में गणना की जाती है। गणितीय संप्रत्ययों का अध्ययन करने के पश्चात् ऐसा लगता है कि मानव रचित इस विषय का महत्व जीवन के हर क्षेत्र में सबसे ज्यादा है। गणितज्ञों की जीवनी पढ़ाना भी गणित के प्रति छात्रों में रूचि उत्पन्न करती है, साथ-ही-साथ गणित शिक्षण के लिए गणितीय समस्याओं को जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से जोड़कर, कहानी के माध्यम से रुचिपूर्वक कराई जा सकती है। गणित का स्थान पाठ्यक्रम में अन्य विषयों की तुलना में सबसे अधिक है। विज्ञान के हर क्षेत्र में इसका उपयोग होता है।

1.13.0 अपनी प्रगति जाँचने के लिए अपेक्षित उत्तर

1. 1.3.1 भारतीय गणितज्ञों का योगदान
2. 1.3.0 गणित शिक्षण पर विशेष ध्यान देते हुए गणित का इतिहास
3. 1.4.2 गणित की प्रकृति
4. 1.6.0 गणित का अन्य विषयों के साथ सह-सम्बंध
5. 1.7.0 पैटर्न की रचना जानना व सामान्यीकृत पैटर्न के रूप में गणित का अध्ययन
6. 1.8.1 गणितीय संरचना (structure) का निर्माण
7. 1.9.0 दिन-प्रतिदिन प्रयुक्त गणित
8. 1.11.0 गणित में सौंदर्य सिद्धांत

1.14.0 विस्तृत अध्ययन के लिए संदर्भ ग्रंथ

- सिंह, योगेश कुमार (2010). गणित शिक्षण: आधुनिक पद्धतियाँ. नई दिल्ली: ए.पी.एच. पब्लिशिंग हाउस.
- मंगल, एस.के. (2005). गणित शिक्षण. नई दिल्ली: आर्य बुक डिपो
- नेगी, जे.एस. (2007). गणित शिक्षण. आगरा: विनोद पुस्तक मंदिर
- कुलश्रेष्ठ, ए.के. (2007). गणित शिक्षण. मेरठ: आर. लाल बुक डिपो
- The Teaching of Mathematics by I.W.A. Young.

- The Teaching of Mathematics by K.S. Sidu.
- AMT-01. Teaching Mathematics. IGNOU Series.
- Boyer, C. B. (1968). History of Mathematics. New York: John Wiley.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-49.
- Devlin K. (2011).Introduction to Mathematical thinking. Ernest P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education.

इकाई-2
गणित सीखना, पाठ्यक्रम और विधियाँ

इकाई की संरचना

2.1. उद्देश्य

2.2. प्रस्तावना

2.3. संज्ञानात्मक विकास का अर्थ

2.3.1 जीन पियाजे

2.3.2 जे.एस.ब्रुनर

2.3.3 वाइगोटस्की

अपनी प्रगति की जाँच करें

2.4. पेडागोजिकल विश्लेषण

2.4.1 शिक्षण-बिंदुओं के निर्धारण की आवश्यकता

2.4.2 शिक्षण-बिंदुओं को निर्धारण करने की विधि

2.4.3 पेडागोजिकल विश्लेषण (Pedagogical Analysis) प्रकरण: समुच्चय

2.4.4 प्रकरण : अनुपात एवं समानुपात

अपनी प्रगति की जाँच करें

2.5. गणित शिक्षण की विधि

2.5.1 व्याख्यान विधि

2.5.2 आगमन विधि

2.5.3 निगमन विधि

अपनी प्रगति की जाँच करें

2.5.4 विश्लेषण विधि

2.5.5 संश्लेषण विधि

2.5.6 प्रदर्शन विधि

अपनी प्रगति की जाँच करें

2.5.7 पूछताछ और खोज विधि

2.5.8 समस्या समाधान विधि

2.5.9 प्रोजेक्ट विधि

2.5.10 प्रयोगशाला विधि

अपनी प्रगति की जाँच करें

2.6. सारांश

2.7. अपनी प्रगति के लिए अपेक्षित उत्तर

2.8. विशेष अध्ययन के लिए संदर्भ पुस्तकें

2.1. उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर आप-

- पियाजे, ब्रुनर और वाइगोटस्की के अंतर्दृष्टि चिंतन का विश्लेषण कर सकेंगे।
- गणित के विभिन्न प्रसंगों का शैक्षिक विश्लेषण कर सकेंगे।
- गणित शिक्षण में प्रयुक्त होने वाले विभिन्न शिक्षण विधियों का शिक्षण में उपयोग कर सकेंगें।
- गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों का विश्लेषण कर सकेंगे।
- गणित शिक्षण में विद्यार्थियों को ध्यान में रखकर विभिन्न प्रसंगों के लिए उपयुक्त शिक्षण विधियों का चुनाव कर सकेंगें।

2.2. प्रस्तावना

गणितीय संप्रत्यय को सीखने के लिए विभिन्न मनोवैज्ञानिकों ने विद्यार्थियों को ध्यान में रखकर अलग-अलग तरीकों से चिंतन पर जोर दिया है जिससे गणित विषय को समझने में आसानी हो सके, इसे ध्यान में रखते हुए महत्वपूर्ण मनोवैज्ञानिकों पियाजे, ब्रुनर, वाइगोटस्की के अंतर्दृष्टि चिंतन को ध्यान में रखते हुए अधिगम से जुड़ी समस्याओं को ध्यान में रखना जरुरी है। शिक्षण को प्रभावी बनाने के लिए शैक्षणिक विश्लेषण करना जरुरी है अत: कुछ प्रसंगों का शैक्षणिक विश्लेषण भी किया गया है। विभिन्न शिक्षण विधियों से उपयुक्त शिक्षण विधि का चुनाव जरूरी है ताकि अधिगम की प्रक्रिया को प्रभावी और उत्कृष्ट बनाया जा सकें।

2.3.0 संज्ञानात्मक विकास का अर्थ

संज्ञान से तात्पर्य एक ऐसी प्रक्रिया से होता है जिसमें संवेदना(sensation), प्रत्यक्षण(Perception), प्रतिमा (Imagery), धारणा (Retention), प्रत्याह्वान (Recall), समस्या समाधान, चिंतन(Thinking), तर्कणा (Reasoning) जैसी मानसिक प्रक्रियायें सम्मिलित होती है। अत: संज्ञान से तात्पर्य जैसा की निसेर (Neisser, 1967) ने कहा है, "संवेदी सूचनाओं (Sensory Information) को ग्रहण करके उसका रूपांतरण (Transformation), विस्तरण (Elaboration), संग्रहण (Storage), पुनर्लाभ(Recovery) तथा उसका समुचित प्रयोग करने से होता है।"

संज्ञानात्मक विकास से तात्पर्य बालकों में संवेदी सूचनाओं को ग्रहण करके उसपर चिंतन करने तथा क्रमिक रूप से उसे इस लायक बना देने से होता है जिसका प्रयोग विभिन्न परिस्थितियों में करके तरह-तरह की समस्याओं का समाधान आसानी से कर सकते है। अत: इस प्रकार का विकास बालकों में होने वाले बौद्धिक विकास(Intellectual Development) से संबंधित है, जो वर्ग में शिक्षकों के लिए एक प्रमुख विषय है।

गणितीय संप्रत्ययों को सीखने में संज्ञानात्मक सिद्धांत देने वाले मनोवैज्ञानिक

- **जीन पियाजे**
- **जे.एस.ब्रुनर**
- **वाइगोटस्की**

2.3.1 जीन पियाजे

जीन पियाजे (1896-1980) एक प्रमुख स्विस मनोवैज्ञानिक थे, जिनका प्रशिक्षण प्राणिविज्ञान वह है बालकों में वास्तविकता के स्वरुप के बारे में चिंतन करने तथा उसे खोज करने की शक्ति न तो सिर्फ बालकों की परिपक्वता स्तर(maturation level) पर और न सिर्फ उसके अनुभवों पर निर्भर करता है, बल्कि इन दोनों की अंत:क्रिया(Interaction) द्वारा निर्धारित होती है।

पियाजे के संज्ञानात्मक विकास का सिद्धांत के कुछ महत्वपूर्ण संप्रत्यय

1.अनुकूलन(Adaptation): पियाजे के अनुसार बालकों में वातावरण के साथ समंजन(Adjustment) करने की एक जन्मजात प्रवृत्ति होती है जिसे अनुकूलन कहा जाता है।

उन्होंने अनुकूलन की प्रक्रिया की दो उपप्रक्रियाएं बताई है-

अ) आत्मसात्करण (Assimilation)

ब) समायोजन (Accommodation)

ये दोनों ही स्वयं एवं वातावरण की वस्तुओं के बारे में सूचना प्राप्त करने की मूल योजना है।

आत्मसात्करण: एक ऐसी प्रक्रिया जिसमें बालक समस्या के समाधान के लिए या वास्तविकता से समंजन करने के लिए पूर्व सीखी गई योजनाओं या मानसिक प्रक्रियाओं(mental operations) का सहारा लेता है। जैसे- यदि शिशु किसी वस्तु को उठाकर अपने मुँह में रख लेता है, तो यह आत्मसात्करण का उदाहरण होगा, क्योंकि वह वस्तु को एक परिचित क्रिया अर्थात खाने की क्रिया से आत्मसात कर रहा है।

समायोजन: कभी-कभी वास्तविकता से समंजन करने में बालक अपनी योजना, संप्रत्यय(concept) या व्यवहार में परिवर्तन लाता है ताकि वह नए वातावरण के साथ अनुकूलन या समंजन(adjustment) कर सके। जैसे: कोई बालक यह जानता है कि 'कुत्ता' क्या होता है, परंतु एक बिल्ली को देखकर जब वह अपने मानसिक संप्रत्यय(Mental Concept) में परिवर्तन कर बिल्ली की कुछ विशेषताओं पर गौर करता है, तो यह समायोजन का उदाहरण होगा।

साम्यधारण(Equilibration): एक ऐसी प्रक्रिया, जिसके द्वारा बालक आत्मसात्करण तथा समायोजन की प्रक्रियाओं के बीच एक संतुलन कायम करता है। इस तरह से साम्यधारण एक तरह की आत्म-नियंत्रक(self regulatory) प्रक्रिया है।

संरक्षण(Conservation): संरक्षण से तात्पर्य वातावरण में परिवर्तन (change) तथा स्थिरता (Constancy) दोनों को पहचानने एवं समझने की क्षमता तथा किसी वस्तु के रूप-रंग में परिवर्तन को उस वस्तु के तत्व(substance) में परिवर्तन से अलग करने की क्षमता से होता है।

संज्ञानात्मक संरचना(Cognitive structure): किसी बालक का मानसिक संगठन या मानसिक क्षमताओं के सेट को संज्ञानात्मक संरचना कहा जाता है।

मानसिक संक्रिया(Mental operation): संज्ञानात्मक संरचना की संक्रियता(action) ही मानसिक संक्रिया है। मानसिक संक्रिया चिंतन का एक प्रमुख साधन है।

स्कीम्स(Schemes)- व्यवहारों के संगठित पैटर्न (organized pattern) को जिसे आसानी से दोहराया जा सकता है उसे स्कीम्स कहा जाता है। जैसे- बालक स्कूल जाने के लिए जब अपनी किताब-कॉपी वर्ग रूटीन

के अनुसार लेता है, स्कूल ड्रेस पहनता है, जूता पहनता है, तब व्यवहारों के ये सभी संगठित पैटर्न को स्कीम्स कहा जाता है। स्कीम्स मानसिक संक्रिया का अभिव्यक्त रूप(expressed form) होता है।

स्कीमा (schema)- स्कीमा से तात्पर्य एक ऐसी मानसिक संरचना से होता है जिसका सामान्यीकरण किया जा सके।

विकेंद्रण- पियाजे के अनुसार विकेंद्रण से तात्पर्य किसी वस्तु या चीज के बारे में वस्तुनिष्ठ या वास्तविक ढंग से सोचने की क्षमता से होता है।

पियाजे के सिद्धांत की चार प्रमुख पूर्वकल्पनाएँ हैं-

1) मानव शिशु जन्म से ही वातावरण की अनिश्चितता को दूर करने के लिए अनुकूलन करता है तथा एक संबंधित एवं समन्वित ढंग से इस क्षमता को विकसित करने की कोशिश करता है।

2) जब बालकों के सामने कोई ऐसी घटना घटती है जिसे उसका पहले कभी अनुभव नहीं हुआ है तो इससे उसमे एक तरह का संज्ञानात्मक असंतुलन उत्पन्न हो जाता है, जिसे वह आत्मसात्करण तथा समायोजन के माध्यम से संतुलित करता है।

3) साम्यधारण की प्रक्रिया सिर्फ बालकों की गत अनुभूतियों पर ही निर्भर नहीं करती है, बल्कि उनकी शारीरिक परिपक्वता के स्तर पर भी, यानी उसके स्नायुमंडल, संवेदी अंगों, पेशीय अंगो के विकास पर भी निर्भर करता है।

4) साम्यधारण का प्रभाव यह होता है कि बालकों की संज्ञानात्मक संरचना अधिक विकसित हो जाती है, जिसके कारण संज्ञानात्मक विकास की चारों अवस्थाओं में उनका विकास समरेखिक होता है।

पियाजे के संज्ञानात्मक विकास का सिद्धांत- पियाजे ने बालकों के संज्ञानात्मक विकास की व्याख्या करने के लिए एक चार-अवस्था वाले सिद्धांत का प्रतिपादन किया है। वे अवस्थाएँ निम्नांकित हैं-

अ) संवेदी-पेशीय अवस्था

ब) प्राकसंक्रियात्मक अवस्था

स) ठोस संक्रिया की अवस्था

द) औपचारिक संक्रिया की अवस्था

अ) संवेदी-पेशीय अवस्था

यह अवस्था जन्म से दो वर्ष तक की होती है। इस अवस्था में शिशुओं में अन्य क्रियाओं के साथ-साथ शारीरिक रूप से चीजों को इधर-उधर करना, वस्तुओं की पहचान की कोशिश करना, किसी चीज को पकड़ना और प्राय: मुँह में डालकर अध्ययन करना आदि प्रमुख है। धीरे-धीरे विकास के साथ इस अवस्था में बालक उन वस्तुओं के प्रति भी अनुक्रिया करना प्रारंभ कर देता है, जो सीधे दृष्टिगोचर नहीं होती हैं। इस गुण को वस्तु स्थायित्व कहा जाता है।

ब) प्राकसंक्रियात्मक अवस्था

यह अवस्था 2 साल से 7 साल की होती है। दूसरे शब्दों में, यह वह अवस्था होती है, जो प्रारंभिक बाल्यावस्था की होती है। इस अवस्था में बालक समझने लगते है कि वस्तु, शब्द, प्रतिमा तथा चिंतन किसी चीज के लिए किया जाता है। इस अवधि में बालकों का चिंतन एवं तर्कणा पहले से अधिक परिपक्व हो जाते है

जिसके परिणामस्वरूप वह साधारण मानसिक प्रक्रियाएँ जो जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग आदि में सम्मिलित होती हैं, उन्हें वह कर पाता है। पियाजे के अंर्तदर्शी चिंतन का एक दोष यह है कि इस उम्र के बालकों के चिंतन में पलटवी गुणा नहीं होता है। जैसे, बालक यह तो समझता है कि 2 x 2 = 4 हुआ परंतु 4 ÷2 =2 कैसे हुआ, यह नहीं समझ पाता है।

स) ठोस संक्रिया की अवस्था

यह अवस्था 7 साल से प्रारंभ होकर 12 साल तक चलती है। इस अवस्था की विशेषता यह है कि बालक ठोस वस्तुओं के आधार पर आसानी से मानसिक संक्रियाएँ करके समस्या का समाधान कर लेता है। परंतु यदि उन वस्तुओं को न देकर उसके बारे में शाब्दिक कथन तैयार कर यदि समस्या उपस्थित की जाती है, तो वे ऐसी समस्याओं पर मानसिक संक्रियाएँ कर किसी निष्कर्ष पर पहुँचाने में असमर्थ रहते हैं। जैसे, यदि उन्हें तीन वस्तुएँ A, B, C दी जाएँ, तो उन्हें देखकर वे आसानी से कह देंगे कि इनमें 'A', 'B' से बड़ा है और 'B', 'C' से बड़ा है। अत: सबसे बड़ा 'A' हुआ। परंतु यदि उनसे यह कहा जाए कि अंजु मंजु से बड़ी है और मंजु बड़ी है रंजु से तो तीनों में सबसे बड़ी कौन है, तो वह इसका उतर देने में असमर्थ रहता है। परंतु इस अवस्था में पलटावी गुणा आ जाता है। इस अवस्था में चिंतन पूर्णत: क्रमबद्ध नही होता है।

द) औपचारिक संक्रिया की अवस्था

यह अवस्था 11 साल से प्रारंभ होकर वयस्कावस्था तक चलती है। यह अवस्था अन्य अवस्थाओं की तुलना में अधिक परिवर्त्य होती है। इस अवस्था में किशोरों का चिंतन अधिक लचीला तथा प्रभावी हो जाता है। इस अवस्था में समस्या के समाधान के लिए समस्या के एकांशो को ठोस रूप में उसके सामने उपस्थित होना अनिवार्य नहीं है।

पियाजे के सिद्धांत की शैक्षिक उपयोगिताएँ

पियाजे ने अपने सिद्धांत में शिक्षार्थी अर्थात बालक की भूमिका को सक्रिय एवं महत्वपूर्ण माना है। इससे शिक्षकों को पाठ्यक्रम तैयार करते समय शिक्षार्थी की आवश्यकता, प्रेरणा एवं अभिरुचि पर विशेष रूप से नज़र रखकर कार्यक्रम तैयार करने में सुविधा होती है। पियाजे के इस सिद्धांत ने शिक्षकों के लिए बालकों के खेल को शैक्षिक रूप से अधिक महत्वपूर्ण माना है। शिक्षक को शिक्षार्थी की मदद अनावश्यक रूप से हर कदम पर नहीं करनी चाहिए। गणित शिक्षक भी गणित को खेल, कहानी के माध्यम से गणित-शिक्षण को प्रभावी बना सकते है।

2.3.2 जे.एस.ब्रुनर

ब्रुनर ने अपने सिद्धांत को पियाजे की अपेक्षा अधिक उन्नत बनाने की कोशिश की है। ब्रुनर ने मूलत: दो प्रश्नों के उत्तर ढूंढने में अधिक रूचि दिखाई-

1) शिशु किस ढंग से अपनी अनुभूतियों को मानसिक रूप से बताते है?

2) शैशवावस्था तथा बाल्यावस्था में बालकों का मानसिक चिंतन कैसे होता है?

ब्रुनर के अनुसार शिशु अपनी अनुभूतियों को मानसिक रूप से तीन तरीकों द्वारा बताता है-

1) सक्रिय रूप, 2) दृश्य प्रतिमा का रूप, 3) प्रतीकात्मक रूप

1) सक्रियता : सक्रियता एक ऐसा तरीका है जिसमें शिशु अपनी अनुभूतियों को क्रिया द्वारा व्यक्त करता है। जन्म के करीब 18 महीनों तक सक्रियता विधि की प्रधानता देखी गई है। जैसे- दूध का बोतल देखकर शिशु द्वारा मुँह चलाना, हाथ-पैर फेकना।

2) दृश्य प्रतिमा : दृश्य प्रतिमा विधि में बालक अपने मन में कुछ दृश्य प्रतिमाएँ बनाकर अपनी अनुभूतियों की अभिव्यक्ति करता है। 1½ वर्ष या 2 साल की उम्र में दृश्य प्रतिमा विधि की प्रधानता होती है।

3) प्रतीकात्मक रूप : इस विधि में बालक भाषा के व्यवहार द्वारा अपनी अनुभूतियों की अभिव्यक्ति करता है। 7 साल की उम्र में इस विधि की प्रधानता होती है।

ब्रुनर ने अपने अध्ययनों के आधार पर बताया कि इन तीनों के संप्रत्यय का विकास एक क्रम में होता है। इसके लिए उसने 3 x 3 मैट्रिक्स में 9 प्लास्टिक के (छोटे से लंबे तथा चौड़े) गिलास को सजाकर बालकों के सामने रखा। बालकों के समूह में 5 साल से 7 साल तक के बालक थे। इस मैट्रिक्स की विशेषता यह थी कि खड़े किनारों पर के गिलास नीचे से ऊपर की दिशा में लंबाई में बढ़ते थे तथा पड़े किनारों पर के गिलास बाई ओर से दाई ओर बढ़ने में चौड़ाई में बढ़ते थे। बालकों को अभी-अभी देखे गए मैट्रिक्स के समान गिलासों को सुव्यवस्थित कर डिज़ाइन को हू-ब-हु दोबारा बनाना होता था। हू-ब-हू दोबारा बनाने के कार्य में अधिक बालकों(जिनकी उम्र 5 से 7 साल की थी) को सफलता मिली। परंतु, दूसरे पक्षांतर कार्य में 5 साल की उम्र के सभी बालक असफल रहे तथा 6 साल के कुछ ही बालकों को सफलता मिल पाई, परंतु 7 साल के अधिकतर बच्चों को अच्छी सफलता मिली। असफलता का मूल कारण, 5 साल के बालकों में सांकेतिक विधि से अर्थात भाषा द्वारा अपनी अनुभूतियों को व्यक्त करने की क्षमता नहीं विकसित हुई थी। ब्रुनर के अनुसार बालकों के चिंतन में भाषा की अहमियत अधिक होती है।

2.3.3 वाइगोटस्की

मनोवैज्ञानिक वाइगोटस्की का मत था कि पियाजे ने संज्ञानात्मक विकास के अपने सिद्धांत में बच्चों द्वारा वातावरण को स्वतंत्र रूप से खोजबीन कर संज्ञानात्मक विकास की प्रक्रिया पर बल डाला है, परंतु सामाजिक-सांस्कृतिक संदर्भ को महत्वपूर्ण नहीं माना है। इन्होंनें बच्चों के संज्ञानात्मक विकास में सामाजिक कारकों एवं भाषा को महत्वपूर्ण बतलाया है। इसलिए वाइगोटस्की के संज्ञानात्मक विकास के सिद्धांत को सामाजिक-सांस्कृतिक सिद्धांत भी कहा जाता है। वाइगोटस्की ने यह बतलाया कि सचमुच में संज्ञानात्मक विकास एक अंतरवैयक्तिक सामाजिक परिस्थिति में संपन्न होता है, जिसमें बच्चों को अपने वास्तविक विकास के स्तर अर्थात जहाँ तक वे बिना किसी मदद के अपने ही कोई कार्य कर सकते है, से अलग तथा उनके संभाव्य विकास के स्तर अर्थात, जिसे वे सार्थक एवं महत्वपूर्ण व्यक्तियों की सहायता से प्राप्त करने में सक्षम है, की ओर ले जाने की कोशिश की जाती है। इन दोनों स्तरों के बीच के अंतर को **वाइगोटस्की ने समीपस्थ विकास** का क्षेत्र कहा है।

मान लिया जाए कि 5 वर्ष की कविता तथा सविता पियाजे द्वारा की गई संरक्षण समस्याओं का समाधान नही कर पाती हैं। परंतु माता-पिता, शिक्षक या अन्य अपने से बड़े उम्र के बच्चों से निर्देशन पाकर कविता इन समस्याओं का समाधान नहीं कर पाती है, जबकि सविता कर लेती है। क्या ये दोनों बच्चियाँ एक ही संज्ञानात्मक

स्तर पर है? **वाइगोटस्की** का उत्तर होगा कदापि नहीं क्योंकि दोनों के समीपस्थ विकास का क्षेत्र अर्थात बच्चे स्वतंत्र रूप से क्या कर सकते है तथा वयस्कों से सहायता प्राप्त करके वे क्या और कर सकते है, दोनों में अंतर है।

वाइगोटस्की के सिद्धांत में समीपस्थ विकास के क्षेत्र का महत्व

1) इससे यह पहचान करने में मदद मिलती है कि बच्चे क्या जल्द ही अपने स्तर से कुछ कर सकते है।

2) इससे यह भी पता चलता है कि हमलोग बच्चो की जैविक परिपक्वता के आलोक में एक सीमा या क्षेत्र के भीतर बच्चों के संज्ञानात्मक विकास को आगे बढ़ा सकते हैं।

वाइगोटस्की ने इस प्रश्न पर भी विचार किया कि वयस्कों से साथ की गयी सामाजिक अंत:क्रिया किस तरह से बच्चों के संज्ञानात्मक विकास में मदद करता हैं। अध्ययनों से यह स्पष्ट हुआ है कि प्राय: यह पारस्परिक शिक्षण के प्रारूप में होता है जिसमें शिक्षक तथा बालक बारी-बारी से किसी क्रिया को इस ढंग से करते है जिसमे शिक्षक बच्चे के लिए एक मॉडल के रूप में कार्य करते हैं।

वाइगोटस्की के सिद्धांत का शैक्षिक आशय

वाइगोटस्की सिद्धांत द्वारा शिक्षण एवं अधिगम के लिए एक नयी दृष्टि प्रदान की गई है। यह एक ऐसी दृष्टि है, जिसमें शिक्षण एवं अधिगम के सामाजिक संदर्भ तथा सहयोग के महत्व पर काफ़ी बल डाला गया है। स्कूल में जो कक्षा चलाए जाते है, उनमें वैयक्तिक विभिन्नता पर बल डाला गया है और बच्चों की सक्रिय सहभागिता के लिए पर्याप्त अवसर देने पर बल डाला गया है, इससे छात्रों का शैक्षिक विकास मजबूत होता है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

1. पियाजे के संज्ञानात्मक सिद्धांत की गणित शिक्षण में उपयोगिता बताएँ।

.....

.....

2. वाइगोटस्की के संज्ञानात्मक विकास सिद्धांत में सामाजिक कारकों की भूमिका गणित शिक्षण में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। अपनी राय दीजिए।

.....

.....

2.4.0 पेडागोजिकल विश्लेषण (Pedagogical Analysis)

किसी भी विषय के प्रभावशाली शिक्षण के लिए उस विषय से संबंधित अध्यापक को विषय-विशेष के सामान्य (General), विशिष्ट (Specific) एवं व्यावहारिक उद्देश्यों (Behavioural Objectives) को ध्यान में रखने के लिए पाठ्यक्रम (Curriculum) की आवश्यकता पड़ती है। किसी भी विषय को पढ़ाने का एक मात्र उद्देश्य विषय की प्रकृति (Nature) के अनुकूल छात्रों के व्यवहार में अपेक्षित व्यवहार परिवर्तन (Desired Behavioural Changes) लाना होता है। उद्देश्यों के अनुसार ही पाठ्य-क्रम या पाठ्य-वस्तु की व्यवस्था की जाती है, अर्थात् प्रत्येक पाठ्य-वस्तु के उद्देश्य अलग-अलग होते है। "पाठ्य-वस्तु में से शिक्षक को किन महत्वपूर्ण बातों पर अधिक बल देना चाहिए, इन्हीं को शिक्षण बिंदु (Teaching Points) या परीक्षण बिंदु (Testing Points) कहते हैं।"

उद्देश्यों के आधार पर बालक के व्यवहार में अभीष्ट व्यावहारिक परिवर्तन लाने के लिए शिक्षण क्रिया आयोजित की जाती है। लेकिन, व्यावहारिक परिवर्तन का प्रारूप निश्चित करने के लिए शिक्षक को चाहिए कि वह अपने विषय से संबंधित पाठ्य-सामग्री का विश्लेषण भली-भाँति कर ले, क्योंकि विषय-वस्तु ही एक ऐसा साधन है, जिसके माध्यम से विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति संभव होती है। इसके लिए यह आवश्यक है कि अध्यापक अपने अनुभवों एवं अंतर्दृष्टि के आधार पर प्रमुख शिक्षण बिंदुओं (Testing or Teaching Points) का निर्धारण कर ले। इससे अध्यापक को अपनी शिक्षण प्रक्रिया हेतु एक ठोस आधार प्राप्त हो जाता है, जिसके आधार पर वह अपने लक्ष्य को प्राप्त करने में सक्षम हो सकता है। उसे अपने शिक्षण से संबंधित कार्यक्रम की योजना बनाने में सहायता मिलती है और वह विद्यार्थी के व्यावहारिक परिवर्तन की ओर अपनी समस्त क्रियाओं को केंद्रित करने का प्रयास करता है। शिक्षण प्रक्रिया के दौरान किन स्थलों पर, किन बातों पर, विशेष बल देना चाहिए, जिससे शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति हो सके, यह भी इसी के द्वारा संभव है। छात्रों के व्यवहार परिवर्तन का मूल्यांकन करने के लिए किन पक्षों पर विशेष ध्यान देना चाहिए, यह भी शिक्षण बिंदुओं से जुड़ा है। परीक्षा के समय भी इसकी आवश्यकता पड़ती है। इसीलिए, इन्हें परीक्षण बिंदुओं (Testing Points) के नाम से भी जाना जाता है। कहने का अभिप्राय यह है कि शिक्षण तथा परीक्षण की प्रभावशीलता एवं वैधता (Validity) को बढ़ाने के लिए शिक्षण तथा परीक्षण बिंदुओं का पूर्व निर्धारण कर लेना चाहिए।

2.4.1 शिक्षण-बिंदुओं के निर्धारण की आवश्यकता (Needs for Determining the Teaching-Points)

शिक्षण तथा परीक्षण दोनों में परस्पर सामंजस्य बनाए रखना मूल्यांकन प्रक्रिया की विशेषता है। अध्यापक को चाहिए कि वह शिक्षण उद्देश्यों को स्पष्ट एवं सरल ढंग से प्रतिपादित कर ले तथा उससे संबंधित पाठ्य-क्रम का विश्लेषण बालकों के व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन (Desired changes) लाने की दृष्टि से करे तभी वह शिक्षण बिंदुओं को यथार्थ रूप में निश्चित कर सकेगा। शिक्षण बिंदुओं के निर्धारण की आवश्यकता निम्न दृष्टियों से महत्वपूर्ण है-

1) शिक्षण के उद्देश्यों को सुगमतापूर्वक प्राप्त करने की दृष्टि से।
2) शिक्षण प्रक्रिया में महत्वपूर्ण स्थलों का चुनाव करने की दृष्टि से।
3) शिक्षण की योजनाबद्धता को महत्व प्रदान करने की दृष्टि से।
4) परीक्षा में अंको का वितरण (Distribution of Marks) करने तथा भारांक वेटेज (Weightage) देने के लिए।
5) शिक्षण प्रक्रिया को स्पष्ट एवं निश्चित स्वरुप देने के लिए।
6) परीक्षा की विषय-वस्तु संबंधी वैधता को बनाए रखने की दृष्टि से।

2.4.2 शिक्षण बिंदुओं को निर्धारण करने की विधि (Method of Determining Teaching-Points)

शिक्षण बिंदुओं के निर्धारण का आधार उद्देश्य होते है। इसीलिए, उद्देश्यों के अनुरूप ही पाठ्य-वस्तु का विश्लेषण करना चाहिए। इसके लिए सर्वप्रथम संपूर्ण पाठ्य-वस्तु को उद्देश्यों के अनुरूप विभक्त कर लेना चाहिए,

फिर प्रतिदिन के दृष्टिकोण से कालांशों में विभाजित कर लेना चाहिए। यह इस बात पर निर्भर करता है कि अध्यापक के पास उन उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए कितना समय है। किंतु, दैनिक शिक्षण में इस प्रकार समस्त पाठ्य-क्रम को एक साथ एकत्र करके विश्लेषित करना संभव नही होता है। प्राय: सभी पाठ्य-पुस्तकों में पाठ्य-वस्तु कुछ प्रकरणों के आधार पर विभाजित होती है। अध्यापक के लिए यह अधिक सुविधाजनक होगा कि वह उद्देश्यों को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक प्रकरण को विश्लेषित कर ले। उसके पश्चात् प्रत्येक उद्देश्य की प्राप्ति हेतु आवश्यक कालांशों की संख्या निर्धारित कर ले। वैसे तो विचार विमर्श अथवा व्यक्तिगत सम्मतियों के आधार पर भी शिक्षण-बिंदुओं को निर्धारित किया जा सकता है, किंतु शिक्षण प्रक्रिया के वैज्ञानिक एवं मनोवैज्ञानिक पहलुओं को ध्यान में रखते हुए यह आवश्यक है कि विषय के शिक्षण बिंदुओं का निश्चय अध्यापक स्वयं अपने अनुभव एवं अंतर्दृष्टि के आधार पर करे, तब वह इन्हें अपनी सुविधानुसार संशोधित या परिवर्तित कर सकता है।

2.4.3 पेडागोजिकल विश्लेषण (Pedagogical Analysis) प्रकरण: समुच्चय

1. उद्देश्य निर्धारण

1) छात्रों को विभिन्न प्रकार के समूहों एवं संग्रहों का ज्ञान कराना।
2) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे विभिन्न प्रकार के संग्रहों अथवा समूहों को गणितीय परिभाषा में लिख सकें।
3) छात्रों को इस योग्य बनाना की वस्तुओं के समूहों को समुच्चय के रूप में व्यक्त करने का कौशल प्राप्त कर सकें।
4) छात्रों को समुच्चय के संप्रत्यय का अर्थ स्पष्ट हो सके।
5) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे समुच्चय का निरूपण कर सकें।
6) छात्रों को समुच्चय के अवयवों या सदस्यों का ज्ञान कराना।
7) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे विभिन्न प्रकार के समुच्चयों को परिभाषित कर सके।
8) छात्र समान समुच्चय एवं उप-समुच्चय में अंतर स्पष्ट कर सकें।
9) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे समुच्चय संबंधी विधियों में समुच्चय कथन को लिख सकें।
10) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे एक बड़े समुच्चय संबंधी समस्यात्मक प्रश्नों को हल कर सकें।
11) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे एक बड़े समुच्चय के सभी उप-समुच्चय लिख सकें।
12) छात्रों को इस योग्य बनाना कि समुच्चय पर आधारित विभिन्न संक्रियायों का अनुप्रयोग कर सकें।
13) छात्र समुच्चय का व्यावहारिक प्रयोग कर सकें।
14) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे समुच्चय से संबंधित समस्यात्मक प्रश्नों को शुद्धता एवं शीघ्रता से हल करने का कौशल प्राप्त कर सकें।

2. अधिगम-अनुभव

1) छात्र विभिन्न प्रकार के समूहों एवं संग्रहों के बारे में ज्ञान रखते हैं।
2) छात्र विभिन्न प्रकार के समूहों अथवा संग्रहों को समुच्चय के रूप में लिख सकते हैं।
3) छात्र समुच्चय के प्रत्यय को भली भाँति स्पष्ट कर सकते हैं।

4) छात्र विभिन्न प्रकार के समुच्चयों को परिभाषित कर सकते है।
5) छात्र समुच्चय को निरुपित करने की दोनों विधियों का प्रयोग भली भाँति कर सकते हैं।
6) छात्र एक बड़े समुच्चय से उसके विभिन्न उप-समुच्चयों को लिख सकते है।
7) छात्र समुच्चय के प्रत्यय का प्रयोग दैनिक जीवन से संबंधित समस्याओं में कर सकते हैं।
8) छात्रों की तार्किक एवं चिंतन शक्ति विकसित हुई है।

3. विधि एवं सामग्री

समुच्चयों के संप्रत्यय एवं इस पर आधारित समस्याओं को हल करने के लिए निम्नलिखित सहायक सामग्री, विधि/प्रविधि प्रयोग में लायी जाएगी।

1) मौखिक उदाहरणों से समुच्चय शब्द का अर्थ स्पष्ट किया जाएगा।
2) कुछ समूहों तथा संग्रहों को समुच्चय के रूप में अध्यापक स्वयं व्यक्त करेंगे और फिर कुछ समूहों तथा संग्रहों को समुच्चय के रूप में छात्रों से व्यक्त करायेगा।
3) रिक्त समुच्चय, एकल समुच्चय, विसंधीत समुच्चय आदि को अध्यापक विस्तृत रूप से स्पष्ट करेगा।
4) अध्यापक, छात्रों से कुछ रिक्त समुच्चय, एकल समुच्चय, विसंधीत समुच्चय आदि के उदाहरण देने को कहेगा।
5) Inductive-deductive method का प्रयोग करेगा।
6) Questioning Technique का प्रयोग किया जाएगा।
7) Illustrative Technique का प्रयोग किया जाएगा।
8) शिक्षक समुच्चयों का संघ और सर्वनिष्ठ समुच्चय को ज्ञात करने का तरीका समझाएगा।
9) खेलों से संबंधित प्रश्नों को समुच्चय द्वारा हल करके प्रस्तुत करने के तरीकों में जीवंतता लाएगा।

4. मूल्यांकन

अधिगम-अनुभव के मूल्यांकन के लिए शिक्षक विविध प्रकार के प्रश्नों को पूछेगा। साथ ही ज्ञान को स्थायी बनाने के लिए कक्षा कार्य तथा गृह-कार्य देगा। समुच्चय संबंधी मूल्यांकन के लिए कुछ प्रश्नों के नमूने इस प्रकार हो सकते हैं-

1) समुच्चय किसे कहते हैं।
2) दो समतुल्य समुच्चयों के उदाहरण दो।
3) समुच्चय A = {1,2,3} के विभन्न उप-समुच्चय बताओं।
4) दैनिक जीवन से संबंधित किसी समुच्चय का उदाहरण दो।
5) यदि A = भारत के प्रथम पाँच प्रधानमंत्रियों के नामों का समुच्चय है। इसे सारणी विधि एवं नियम विधि में लिखिए।

2.4.4 प्रकरण : अनुपात एवं समानुपात

1. उद्देश्य निर्धारण

1) छात्रों को सजातीय एवं विजातीय राशियों के बारे में ज्ञान कराना।

2) छात्रों को अनुपात के संप्रत्यय का ज्ञान कराना।
3) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे अनुपात को चिन्हित कर सकें।
4) छात्रों को अनुपात के पदों का ज्ञान कराना।
5) छात्रों को अनुपात के गुणों का ज्ञान कराना।
6) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे अनुपात संबंधी कथनात्मक एवं आंकिक प्रश्नों को हल कर सकें।
7) छात्रों को समानुपात के संप्रत्यय का ज्ञान कराना।
8) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे समानुपात के चिन्ह से परिचित हो जाएँ।
9) छात्रों को समानुपात के पदों का ज्ञान कराना।
10) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे मिश्रसमानुपात संबंधी प्रश्नों को हल कर सकें एवं इस प्रत्यय को परिभाषित कर सकें।
11) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे विततसमानुपात,मध्यानुपाती, तृतीयानुपाती एवं चतुर्थानुपाती के प्रत्यय को समझ सकें और इन पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकें।
12) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे अनुपात एवं समानुपात का व्यावहारिक प्रयोग कर सकें।
13) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे कथनात्मक प्रश्नों में अनुलोम तथा विलोम संबंधों को समझ सकें।
14) छात्रों को अनुलोम तथा विलोम संबंधों के चिन्हों से परिचित कराना।
15) छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे अनुपात एवं समानुपात से संबंधित समस्यात्मक प्रश्नों को शुद्धता एवं शीघ्रता से हल करने का कौशल प्राप्त कर सकें।

2. अधिगम- अनुभव

1) छात्र सजातीय एवं विजातीय राशियों के बारें में ज्ञान रखते हैं।
2) छात्रों को अनुपात के संप्रत्यय का ज्ञान है।
3) छात्र अनुपात को चिन्हित कर सकते हैं।
4) छात्र अनुपात संबंधी कथनात्मक एवं आंकिक प्रश्नों को हल कर सकते हैं।
5) छात्रों को समानुपात के संप्रत्यय का ज्ञान है।
6) छात्र समानुपात के चिन्ह से परिचित हैं।
7) छात्र वितत समानुपात, मध्यानुपाती, तृतीयानुपाती एवं चतुर्थानुपाती के प्रत्यय को समझ गए हैं और उन पर आधारित आंकिक प्रश्न हल कर सकते हैं।
8) छात्र कथनात्मक प्रश्नों में अनुलोम एवं विलोम संबंध को समझ कर उनका अनुप्रयोग कर सकते हैं।
9) छात्र समानुपात के प्रत्यय का प्रयोग अपने दैनिक जीवन से संबंधित समस्याओं में कर सकते हैं।
10) छात्रों की तार्किक एवं चिंतन शक्ति विकसित हुई है।

3. विधि एवं सामग्री

अनुपात एवं समानुपात के संप्रत्यय एवं इस पर आधारित समस्याओं को हल करने के लिए निम्नलिखित सहायक सामग्री, विधि/प्रविधि प्रयोग में लायी जाएगी-

1) मौखिक उदाहरणों से अनुपात एवं समानुपात का अर्थ स्पष्ट किया जाएगा।

2) कुछ अनुपात एवं समानुपात के संप्रत्यय के व्यावहारिक उदाहरण शिक्षक स्वयं व्यक्त करेगा तथा कुछ को छात्रों से व्यक्त करने को कहेगा।
3) Inductive-deductive method का प्रयोग करेगा।
4) Questioning Technique का प्रयोग किया जाएगा।
5) Illustrative Technique का प्रयोग किया जाएगा।
6) दैनिक जीवन से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करके शिक्षण में जीवन्तता लायेगा।

4. मूल्यांकन

अधिगम-अनुभव के मूल्यांकन के लिए शिक्षक विविध प्रकार के प्रश्न कक्षा में पूछेगा। साथ ही ज्ञान को स्थायी बनाने के लिए कक्षा तथा गृह-कार्य देगा। मूल्यांकन संबंधी कुछ प्रश्नों के नमूने इस प्रकार हो सकते हैं-

1) सजातीय एवं विजातीय राशियाँ किन्हें कहा जाता है ?
2) अनुपात किसे कहा जाता है?
3) समानुपात किसे कहा जाता है?
4) Extreme Terms and Middle Terms क्या होते हैं?
5) यदि a, b, c वितत समानुपात में हैं, तो मध्यानुपाती, तृतीयानुपाती व चतुर्थानुपाती के प्रत्यय को समझाइए।
6) यदि 14 आदमी 8 घंटे प्रतिदिन काम करके किसी काम को 15 दिन में पूरा करते हैं तो 20 आदमी 12 दिन में काम पूरा करने के लिए कितने घंटे प्रतिदिन काम करेंगे?

अपनी प्रगति की जाँच करें

3. उपरोक्त प्रसंग के शैक्षिक विश्लेषण के अनुरूप निम्न प्रसंगों का शैक्षिक विश्लेषण करें: 1. समीकरण 2. आयतन 3. त्रिकोणमिति।

.....
.....

2.5 गणित शिक्षण की विधि

आज के मनोवैज्ञानिक युग में बालक को ही शिक्षा का केंद्र-बिंदु माना जाता है। शिक्षण का मुख्य उद्देश्य बालक के व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन करना है। यह तभी संभव है जब शिक्षण प्रभावशाली हो। शिक्षण विधि को शिक्षक के द्वारा शिक्षण के समय अपनाए जाने वाले व्यवहार के रूप में भी समझ सकते हैं। गणित के संबंध में अभी तक 'क्या' तथा 'क्यों' पर ही विचार किया गया है, परंतु गणित को जो कि एक जटिल विषय समझा जाता है, 'कैसे पढ़ाया जाए?' संपूर्ण शिक्षक वर्ग के लिए एक कठिन समस्या बनी हुई है। गणित का ज्ञान 'बच्चों को

कैसे देना हैं?' अथवा बालकों को 'गणित किस प्रकार सिखाना है?' इस प्रकार के अनेकों प्रश्नों के जबाब हम शिक्षण-विधियों के आधार पर ही दे सकते हैं।

शिक्षण विधि की परिभाषाएँ

1. "शिक्षण-विधि शिक्षक द्वारा संचालित वह प्रक्रिया है, जिससे विद्यार्थियों को ज्ञान की प्राप्ति होती है।"
2. जॉन डी. वी. के अनुसार- "शिक्षण पद्धति वह तरीका है, जिसके द्वारा हम पठन सामग्री को व्यवस्थित करके, निष्कर्षों को प्राप्त करते है।"

गणित शिक्षण की मुख्य विधियाँ

प्राथमिक तथा उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण की निम्न विधियाँ हैं-

1) व्याख्यान विधि (Lecture Method)
2) आगमन विधि (Inductive Method)
3) निगमन विधि (Deductive Method)
4) विश्लेषण विधि (Analytic Method)
5) संश्लेषण विधि (Synthetic Method)
6) प्रदर्शन विधि (Demonstration Method)
7) पूछताछ और खोज विधि (Inquiry and Heuristic Method)
8) जिज्ञासा उपागम या समस्या समाधान विधि (Curiosity Approach or Problem solving Method)
9) परियोजना विधि (Project Method)
10) प्रयोगशाला विधि (Laboratory Method)

2.5.1 व्याख्यान विधि

इसमें लिखित या मौखिक भाषा के द्वारा सूचनाएं प्रदान की जाती है या किसी विचार का शाब्दिक चित्र प्रस्तुत किया जाता है। इसलिए इसको अक्सर चाक और वार्तालाप (Chalk and talk) विधि कहा जाता है, इसमें हर चीज शब्दों में व्यक्त की जाती है।

व्याख्यान के द्वारा शिक्षक छात्रों के समक्ष विषय-वस्तु से संबंधित तथ्यों, सिद्धांतों, नियमों, प्रक्रियाओं आदि को मौखिक रूप से स्पष्ट करता है। गणित-शिक्षण में व्याख्यान विधि का प्रयोग प्राचीन काल से चला आ रहा है। प्राचीन समय में संसाधनों के अभाव के कारण शिक्षक व्याख्यान द्वारा ही विद्यार्थियों को ज्ञान दे सकता थाI जब से मनोवैज्ञानिकों ने 'बालक को केंद्र मानकर पढ़ाना चाहिए' की ओर ध्यान आकर्षित किया है, तब से व्याख्यान विधि का महत्व कम हो गया हैI

व्याख्यान विधि के गुण-

1) व्याख्यान विधि से विषय-वस्तु को संगठित रूप से तथा एक निश्चित क्रम से पढ़ाया जा सकता है।
2) कम समय में छात्रों को अधिक से अधिक ज्ञान दिया जा सकता है।
3) किसी पाठ की प्रस्तावना के समय अथवा पढ़ाई गयी विषय-वस्तु के दोहराव के लिए इस विधि का प्रयोग उपयोगी सिद्ध होता है।

4) यह विधि गणितज्ञों की जीवनी एवं गणित से संबंधित ऐतिहासिक घटनाओं के शिक्षण हेतु भी उपयुक्त है।
5) यह विधि शिक्षक के लिए भी बहुत सरल है। पाठ की तैयारी हेतु उसे बहुत अधिक प्रयत्न नही करने होते है।

व्याख्यान विधि के दोष

1) जिस समय अध्यापक व्याख्यान देता है तब विद्यार्थी निष्क्रिय रूप से बैठे रहते है और अध्यापक सक्रिय रहता है। उन्हें स्वयं तर्क करने तथा चिंतन करने का अवसर नही मिलता।
2) इस विधि के प्रयोग से अध्यापक विद्यार्थियों की कठिनाई का निदान भी नहीं कर सकता। वह समझता है कि सभी विद्यार्थी पाठ को समझ रहे हैं, जबकि वास्तव में अनेक विद्यार्थी उसे नहीं समझ पाते हैं।
3) इस विधि के द्वारा शिक्षक बालकों में गणितीय अभिवृत्ति विकसित करने में भी असमर्थ रहता है, जो की गणित शिक्षण का एक प्रमुख उद्देश्य है।
4) इस विधि के द्वारा बालकों को गणितीय विधि में प्रशिक्षित करना भी संभव नहीं है।
5) यह विधि शिक्षण के 'करके सीखने के सिद्धांत' के विपरीत है।

2.5.2 आगमन विधि

परिभाषा

यंग के अनुसार, "इस विधि में बालक विभिन्न स्थूल तथ्यों के आधार पर अपनी मानसिक शक्ति का प्रयोग करते हुए स्वयं किसी विशेष सिद्धांत, नियम अथवा सूत्र पर पहुँचता है।"

लैंडल के अनुसार, "जब बालकों के समक्ष अनेक तथ्यों, उदाहरणों एवं वस्तुओं को प्रस्तुत किया जाता है, और बाद में बालक स्वयं ही निष्कर्ष पर पहुँचने का प्रयास करते है, तब वह विधि आगमन विधि कहलाती है।"

कार्य विधि (Procedure)

आगमन विधि से पढ़ाई करते समय उदाहरणों से नियम की ओर (Proceed from examples to general rules) , विशेष से सामान्य की ओर (Proceed from Particular to general) , तथा स्थूल से सूक्ष्म की ओर (Proceed from concrete to abstract) अग्रसर रहते हैं। अतः छात्र स्वयं भिन्न-भिन्न स्थूल तथ्यों के आधार पर किसी निष्कर्ष अथवा सामान्यीकरण पर पहुँचता है। इस प्रक्रिया को ही आगमन कहते हैं।

आगमन विधि के सोपान (Steps of Inductive Method)

इस विधि के निम्न सोपान हैं-

1) विशिष्ट उदाहरणों की प्रस्तुति
2) निरीक्षण
3) नियमीकरण या सामान्यीकरण
4) परीक्षण एवं सत्यापन

आगमन विधि के गुण

(i) यह विधि तथ्यों को समझने में सहायक होती है। जब बहुत से सरल उदाहरणों के द्वारा किसी सिद्धांत को स्थापित किया जाता है, तो उसको समझने में आसानी होती है, क्योंकि उससे संबंधित फार्मूला "कैसे और क्यों प्रश्नों का उत्तर शुरू में ही स्पष्ट हो जाता है।

(ii) यह एक मनोवैज्ञानिक विधि है, क्योंकि इसमें छात्रों की रूचि आरंभ से अंत तक बनी रहती है।

उदाहरण 1) साधारण ब्याज की समस्याओं को हल करके सूत्र की स्थापना करना।

प्रश्न 1) 500 रुपये का 8% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल- (ऐकिक नियम से)

चूँकि 100 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = 8 रूपया

∴ 1 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = 8/100 रूपया

∴ 500 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = (8/100 x 500) रुपये

∴ 500 रुपये का 2 वर्ष का ब्याज = (8/100 x 500 x 2) रुपये

= 80 रुपये

इसी प्रकार के अन्य प्रश्नों को हल करके छात्र ब्याज ज्ञात करने की प्रक्रिया का निरीक्षण करने के बाद बालक स्पष्ट कर सकेंगे कि साधारण ब्याज ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित होगा-

साधारण ब्याज = (मूलधन x दर x समय)/100

2.5.3. निगमन विधि (Deductive Method)

निगमन विधि आगमन विधि के बिल्कुल विपरीत है। इस विधि में निगमन तर्क का प्रयोग किया जाता है। निगमन विधि का प्रयोग मुख्यत: बीजगणित, रेखागणित तथा त्रिकोणमिति में किया जाता है क्योंकि गणित के इन उपविषयों में विभिन्न संबंधों, नियमों और सूत्रों का प्रयोग होता है। निगमन विधि में अभिधारणाओं, आधारभूत तत्वों तथा स्वयंसिद्धियों की सहायता ली जाती है।

कार्य विधि

निगमन विधि में सूक्ष्म से स्थूल की ओर, सामान्य से विशिष्ट की ओर तथा प्रमाण से प्रत्यक्ष की ओर या नियम से उदाहरण की ओर अग्रसर होते है। इस विधि में बालकों के सम्मुख सूत्रों, नियमों, निष्कर्षों तथा संबंधों आदि को प्रत्यक्ष रूप में प्रस्तुत किया जाता है। जैसे-

साधारण ब्याज ज्ञात करने का सूत्र = (मूलधन x दर x समय)/100

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई x चौराई

उदाहरण- यदि एक आयत की लंबाई 6 मी. तथा चौड़ाई 4 मी. हो तो आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल- बालक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र का प्रयोग करके समस्या का समाधान कर लेंगे।

यथा-

आयत का क्षेत्रफल = (लंबाई x चौड़ाई) वर्ग इकाई

= 6 मी. x 4 मी. = 24 वर्ग मीटर

निगमन विधि के गुण

1) इस विधि के प्रयोग से गणित का कार्य अत्यंत सरल एवं सुविधाजनक हो जाता है।
2) निगमन विधि द्वारा बालकों की स्मरण शक्ति विकसित होती है, क्योंकि इस विधि का प्रयोग करते समय
1) बालकों को अनेक सूत्र याद करने पड़ते है।
2) इस विधि द्वारा ज्ञानार्जन की गति तीव्र होती है।
3) जब समयाभाव हो तो उन परिस्थितियों में इस विधि का उपयोग करना चाहिए।
4) रेखागणित में स्वयंसिद्धियों, अंकगणित में पहाड़े आदि को पढ़ाने के लिए इस विधि का प्रयोग किया जाता है।
5) इस विधि का प्रयोग करने पर शिक्षक और शिक्षार्थी दोनों को कम परिश्रम करना पड़ता है।
6) इस विधि द्वारा कम समय में अधिक ज्ञान प्रदान किया जाता है।

निगमन विधि के दोष

1) यह विधि मनोविज्ञान के सिद्धांतों के विपरीत है, क्योंकि यह स्मृति-केंद्रित विधि है।
2) यह विधि खोज करने की अपेक्षा रटने पर अधिक बल देती है।
3) इस विधि द्वारा अर्जित ज्ञान अस्पष्ट एवं अस्थाई होता है, क्योंकि उसे वह अपने स्वयं के प्रयासों से नही प्राप्त करते हैं।
4) यह विधि छोटी कक्षों के लिए उपयोगी नहीं है, क्योंकि छोटी कक्षाओं के बालकों के लिए विभिन्न सूत्रों, नियमों आदि को समझाना कठिन है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

4. आगमन और निगमन विधि में तुलना करें।

.....

.....

2.5.4. विश्लेषण विधि (Analytic Method)

यह विधि विश्लेषण प्रक्रिया पर आधारित है। गणित की समस्याओं के विश्लेषण में हम इस विधि का उपयोग करते हैं। यह विधि रेखागणित में अधिक उपयोगी सिद्ध हुई है। इस विधि की सहायता से किसी भी समस्या के कठिन भाग का विश्लेषण करके यह ज्ञात किया जाता है कि इस समस्या का हल किस प्रकार ज्ञात किया जाए?

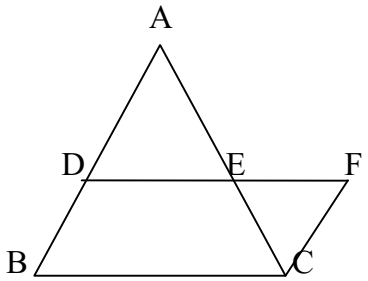
इस विधि में हम 'अज्ञात से ज्ञात' की ओर अथवा 'निष्कर्षों से ज्ञात तथ्यों' की ओर अग्रसर होते हैं। इस विधि में जो ज्ञात करना होता है या सिद्ध करना होता है उससे आरंभ करते हैं कि इसे ज्ञात करने के लिए या सिद्ध करने के लिए हमें पहले क्या ज्ञात करना चाहिए? इस प्रकार ज्ञात करते करते जो कुछ दिया होता है, उस तक पहुँच जाते हैं। इस विधि का प्रयोग मुख्यत: निम्नलिखित परिस्थितियों में किया जाता है-

1) जब किसी साध्य को हल करना हो।
2) जब रेखागणित में कोई रचना-कार्य करना अभीष्ट होता है।
3) जब अंकगणित में किसी नवीन समस्या को हल करना होता है।

रेखागणित में विश्लेषण विधि का प्रयोग

उदाहरण- किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी रेखा के समांतर तथा आधी होती है।

उपरोक्त दिए गए प्रमेय को सिद्ध करने के लिए भुजा DE को F तक इस प्रकार बढ़ाया कि DE = EF तथा AB रेखा के CF को मिलाया। इस विधि द्वारा यह स्पष्ट किया जाता है कि उपरोक्त रचना की आवश्यकता क्यों हुई तथा यह हमें किस प्रकार DE = ½ BC तथा DE॥ BC को सिद्ध करने में सहायक होगीं। इसको सिद्ध करने के लिए इस प्रकार क्रियाएँ करेंगे।



1. हमें क्या दिया है?

(त्रिभुज ABC में, AD=BD और AE=CE)

2.हमें क्या सिद्ध करना है?

(DE II BC तथा DE = ½ BC)

3. DE रेखा BC रेखा की आधी कब हो सकती है?

(जब DE रेखा को दुगना कर दिया जाए , इसलिए DE को F तक बढ़ाया गया, जहाँ DE = EF)

4. दूसरी क्या बात सिद्ध करनी है?

(DE रेखा BC के समांतर होगी।)

5. यह कैसे साबित हो सकता है?

(यदि यह सिद्ध हो जाए कि DBCF एक समांतर चतुर्भुज है।)

6. DBCF को एक समांतर चतुर्भुज किस प्रकार सिद्ध किया जा सकता है?

(यदि सिद्ध हो जाए कि DB रेखा CF के समांतर और बराबर है।)

7. हम कैसे सिद्ध करेंगे कि DB=CF है?

(यह सिद्ध हो जाए कि CF=AD, क्योंकि AD=BD दिया हुआ है)

8. इसे कैसे साबित किया जा सकता है?

(यदि हम सिद्ध कर दे कि Δ ADE तथा Δ ECF को सर्वांगसम (Congruent) है)

9. इन Δ को सर्वांगसम किस प्रकार सिद्ध कर सकते है?

(दोनों Δ की तुलना करने पर, AE = EC दिया है, DE=EF हमने रचना की है तथा $\angle$ AED= $\angle$CEF शीर्षाभिमुख कोण है, इस प्रकार दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है। (SAS से)

10. जब दोनों त्रिभुज बराबर सिद्ध हो गए, तो दोनों त्रिभुज में कौन कौन से भुजा और कोण आपस में बराबर होंगे?

(AD=CF है तब ∠AED=∠CEF, AE=EC है तब ∠ADE=∠CFE, DE=EF है तब ∠DAE=∠FCE)

11. ∠DAE=∠FCE आपस में कौन सा कोण है?

(दोनों एकांतर कोण हैं, और एकान्तर कोण बराबर होने से रेखा AB और रेखा CF समांतर हुई)

12. जब BD II CF तथा BD = CF हुई तो DBCF कैसी आकृति हुई?

(DBCF एक समांतर चतुर्भुज होगा)

13. जब DBCF एक समांतर चतुर्भुज है तो DF तथा BC में क्या संबंध होगा?

(दोनों आपस में बराबर होंगे)

14. DE और DF में क्या संबंध है?

(DE=DF है इसलिए DE= ½ BC होगा)

इस प्रकार जो हमें सिद्ध करना होता है, उसके रहस्य को खोलते हुए सिद्ध करने के लिए जिन बातों की आवश्यकता होती है, उन्हें खोज लेते है।

विश्लेषण विधि के गुण

1) यह विधि मनोवैज्ञानिक दृष्टिकोण पर आधारित है।

2) इस विधि में बालक स्वयं अपनी समस्याओं के समाधान के लिए हल ढूँढ सकता है।

3) इस विधि के द्वारा छात्रों में अन्वेषण करने की क्षमता और आत्म-विश्वास में वृद्धि होती है।

विश्लेषण विधि के दोष

1) यह विधि छोटी कक्षाओं के छात्रों के लिए उपयुक्त है, क्योंकि उस समय उनकी तर्कशक्ति तथा विश्लेषण की क्षमता अधिक विकसित नहीं होती।

2) इस विधि द्वारा शिक्षण करने पर पाठ्यक्रम को निर्धारित समय में पूरा नहीं किया जा सकता है।

3) इस पद्धति का उपयोग तभी संभव है, जब हमें ज्ञात तथ्यों तथा अज्ञात निष्कर्षों की जानकारी है।

2.5.5 संश्लेषण विधि (Synthesis Method)

यह विधि संश्लेषण कार्य पद्धति पर आधारित है। संश्लेषण का अर्थ- "अलग-अलग भागों को जोड़ना है।" इस विधि में 'ज्ञात से अज्ञात' की ओर अग्रसर होते है। जब कोई समस्या सामने आती है, तो सबसे पहले दी गयी समस्त सूचनाओं को एकत्र करते हैं और फिर उसे हल करते हैं। गणित शिक्षक को ज्यामिति तथा रेखागणित शिक्षण करते समय विश्लेषण एवं संश्लेषण दोनों विधियों का एक साथ प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण- संश्लेषण विधि का अंकगणित में प्रयोग

एक बाग की लंबाई 50 मीटर तथा चौड़ाई 20 मीटर है। बाग के चारों ओर एक मार्ग बना है जिसकी चौड़ाई 5 मीटर है, तो मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: इस विधि में हम ज्ञात तथ्यों से अज्ञात तथ्यों को पता करते है।

दिया हुआ है – बाग की लंबाई = 50 मीटर

बाग की चौड़ाई = 20 मीटर
मार्ग की चौड़ाई = 5 मीटर

ज्ञात करना है- मार्ग का क्षेत्रफल
मार्ग सहित बाग की लंबाई= (5+50+5) मीटर= 60 मीटर
मार्ग सहित बाग की चौड़ाई= (5+20+5) मीटर= 30 मीटर
मार्ग सहित बाग का क्षेत्रफल = 60 x 30 =1800 वर्ग मीटर
बाग का क्षेत्रफल = 50 x 20 =1000 वर्ग मीटर
मार्ग का क्षेत्रफल = मार्ग सहित बाग का क्षेत्रफल – बाग का क्षेत्रफल
= 1800 – 1000 = 800 वर्ग मीटर

2.5.6 प्रदर्शन विधि

गणित शिक्षण के लिए प्रदर्शन विधि एक अत्यंत महत्वपूर्ण व लाभदायक विधि है। इससे छात्रों में कठिन संप्रत्ययों को बोधगम्य बनाकर सरलता से गणित के विभिन्न संप्रत्ययों को अध्यापक प्रदर्शन कराते हुए समझा सकता है। जॉनसन के मतानुसार "छोटी कक्षाओं में सामान्य गणित के लिए प्रदर्शन विधि प्रयोगशाला विधि से अधिक मूल्यवान है तथा कम खर्चीली है।" इस विधि में अध्यापक विषय पढ़ाने के साथ साथ उससे संबंधित प्रयोग भी स्वयं करके बच्चों को दिखाता है। प्रदर्शन विधि में बालक की सभी ज्ञानेंद्रिया व्यस्त रहती हैं। इस विधि में शिक्षक एवं छात्र दोनों सक्रिय रहते हैं।

प्रदर्शन विधि के गुण

1) अधिगम प्रेरित वातावरण- इस विधि में छात्र व्याख्यान विधि की तरह निष्क्रिय श्रोता की भाँति नही रहते हैं। इसमें छात्र एवं अध्यापक दोनों का सक्रिय योगदान रहता है।

2) स्पष्ट और स्थायी ज्ञान- इस विधि के द्वारा छात्रों को स्पष्ट और स्थायी ज्ञान प्राप्त होता है, क्योंकि छात्र प्रत्येक वस्तु की रचना, कार्य-प्रणाली आदि को प्रत्यक्ष रूप में देखते हैं।

3) मानसिक विकास में सहायता- इससे छात्रों की तर्क, निरीक्षण तथा विचार जैसी मानसिक शक्तियों का विकास होता है।

4) अध्यापक के कार्य में सहायता- जिस विषय को व्याख्यान विधि द्वारा नही पढ़ाया जा सकता, प्रदर्शन द्वारा ही अध्यापक कम समय में अच्छी तरह पढ़ा सकता है।

5) बचत का साधन- इस विधि में अधिक साधनों की आवश्यकता भी नही होती है।

प्रदर्शन विधि के दोष

1) प्रदर्शन करते समय विद्यार्थी निष्क्रिय बैठे रहते है।
2) इसमें बालक की मौलिकता का विकास नहीं होता है।
3) इस विधि में छात्रों को स्वयं प्रयोग करने, उपकरणों का उपयोग लाने तथा सामान्यीकरण का अवसर नहीं मिल पाता हैं।
4) यदि कक्षा में छात्रों की संख्या अधिक है, तो यह विधि अधिक उपयोगी सिद्ध नहीं हो पाती है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

5. विश्लेषण और संश्लेषण विधि में तुलना करें।

.....

.....

2.5.7 पूछताछ और खोज विधि

गणित की सबसे अधिक प्रभावशाली और मनोवैज्ञानिक प्रणाली खोज विधि है। खोज विधि के आविष्कारक एच. ई. आर्मस्ट्रांग थे। इस प्रणाली का मुख्य आधार हर्बर्ट स्पेन्सर का यह कथन है कि- "बालकों को जितना कम संभव हो, बताया जाए और उनको जितना अधिक संभव हो, खोजने को प्रोत्साहित किया जाए।" यह विधि गणित शिक्षण के लिए विशेष रूप से लाभदायक सिद्ध होती है। आर्मस्ट्रांग ने इस विधि की परिभाषा इस प्रकार से दी है- "Heuristic Method of teaching are methods which Involve placing our students as far as possible, In the attitude of discoverer." (अन्वेषण प्रणाली वह है, जो छात्रों को यथासंभव एक अन्वेषण की स्थिति में ला देती है, जिनमें केवल वस्तुओं के विषय में कहे जाने के बजाए उनकी खोज को आवश्यक माना गया हैI) अंग्रेजी के शब्द 'Heuristic' का जन्म ग्रीक शब्द 'Heurisco' से हुआ है। Heurisco का अर्थ है- "मैं खोजता हूँ।" इस प्रणाली का मुख्य उद्देश्य बालकों में खोज की प्रवृत्ति का उदय करना है।

खोज विधि के गुण

1) खोज विधि से छात्रों का दृष्टिकोण गणितीय बन जाता है तथा उनमें निरीक्षण और जिज्ञासा की भावना
1) विकसित होती है।
2) इस प्रणाली के प्रयोग से अध्यापक संपूर्ण कक्षा के संपर्क में आता है। यह प्रत्येक छात्र के व्यक्तिगत कार्य की
3) देखभाल करता है।
4) इस विधि को अपनाने से बालक में आत्मनिर्भरता की भावना विकसित होती है।
5) यह प्रणाली बालकों को पर्याप्त क्रियाशील रहने का अवसर देती है।
6) यह प्रणाली पूर्णतया मनोवैज्ञानिक है। यह विधि विषयों को बोधगम्य तथा सरल बना देती है।

खोज विधि के दोष

1) यह प्रणाली व्ययपूर्ण है।
2) यह प्रणाली प्राथमिक कक्षा के छात्रों के लिए पूर्णतया व्यर्थ हैI इस प्रणाली का प्रयोग केवल उच्च कक्षाओं में।
1) ही सफलतापूर्वक किया जा सकता है।
2) तथ्यों को खोजने के लिए पर्याप्त समय की आवश्यकता होती है।
3) विशेष ढंग से प्रशिक्षित किए अध्यापक ही खोज विधि का प्रयोग कर सकते हैं।
4) यह प्रणाली केवल उन विद्यालयों में ही प्रयोग की जा सकती है, जहाँ छात्रों की संख्या कम होती है।

2.5.8 समस्या समाधान विधि

समस्या समाधान की परिभाषाएँ

1. रिस्क (Risk) के अनुसार- "शिक्षार्थियों के मन में समस्या को उत्पन्न करने की ऐसी प्रक्रिया, जिससे वे उद्देश्य की ओर उत्साहित होकर तथा गंभीरतापूर्वक सोच कर एक युक्तिसंगत हल निकालते हैं, समस्या समाधान कहलाता है।"

2. आँसुबेल (Ausubel) के अनुसार- " समस्या समाधान में संप्रत्यय का निर्माण तथा अधिगम का आविष्कार सम्मिलित है।"

समस्या समाधान पद्धति के पद- समस्या समाधान पद्धति से शिक्षण हेतु निम्नलिखित कार्य करने होते हैं-

1. समस्या निर्माण तथा चुनाव- समस्या का चुनाव करते समय अध्यापक को इस बात का विशेष ध्यान रखना चाहिए कि समस्या ऐसी हो, जिसका समाधान करने की आवश्यकता शिक्षार्थी महसूस कर सकें। समस्या का चयन अध्यापक एवं शिक्षार्थी दोनों को मिलकर करना चाहिए। समस्या के निर्धारण में यह भी ध्यान रखना चाहिए कि समस्या बहुत व्यापक न हो, स्पष्ट हो, तथा उस हेतु प्रदत्त संकलन आसानी से किया जा सके।

2. समस्या की प्रस्तुति- समस्या का चुनाव करने के बाद अध्यापक को समस्या का पूरा विश्लेषण छात्रों के सम्मुख करना पड़ता है। यह विश्लेषण विचार-विमर्श के द्वारा भी हो सकता है तथा इस पद में अध्यापक शिक्षार्थियों को बताता है कि समस्या के समाधान की पद्धति क्या होगी?, प्रदत्त संकलन कहाँ से और कैसे किया जाएगा इत्यादि।

3. उपकल्पनाओं का निर्माण- समस्या के चयन के उपरांत समस्या की परिकल्पनाओं का निर्माण किया जाता है कि समस्या के क्या संभावित कारण हो सकते है, उनकी सूची बनाई जाती है। उपकल्पनाओं के निर्माण से बालक में समस्या के कारणों पर गहन चिंतन करने की योग्यता विकसित होती है।

4. प्रदत्त संग्रह- परिकल्पनाओं के निर्माण के उपरांत निर्धारित परिकल्पनाओं का परीक्षण करने हेतु छात्र प्रदत्तों का संकलन करते हैं। प्रदत्त संकलन में अध्यापक को चाहिए कि वह छात्रों को निर्देशित करे कि प्रदत्त संकलन कहाँ से और कैसे किया जाए।

5. प्रदत्त विश्लेषण- समस्या समाधान पद्धति के इस पद में तृतीय पद पर निर्मित उपकल्पनाओं का परीक्षण किया जाता है।

6. निष्कर्ष- प्रदत्त विश्लेषण के उपरांत अंतिम निष्कर्ष प्राप्त किए जाते हैं जो परिकल्पनाएँ प्रदत्त विश्लेषण में सही पाई गयीं, उनके आधार पर ही समस्या समाधान के निष्कर्ष दिए जाते हैं।

2.5.9 परियोजना विधि

परियोजना विधि को अंगेज़ी में 'Project Method' कहते हैं। यह गणित शिक्षण की एक महत्वपूर्ण पद्धति है। इस पद्धति के जन्मदाता डब्ल्यू. एच. किलपैट्रिक (W. H. Kilpatrick) हैं। ये डीवी (Dewey) के शिष्य है और इन्होंने उनके प्रयोजनवाद (Pragmatism) के सिद्धांत के आधार परियोजना पद्धति को विकसित किया। किलपैट्रिक महोदय का कहना हैं कि परियोजना वह सहृदय उद्देश्यपूर्ण कार्य है, जिसे लगन के साथ सामाजिक वातावरण में किया जाता है। उनके अनुसार जब कोई व्यक्ति किसी निश्चित क्रम में कोई कार्य करना

आरंभ करता है और स्वयं यह समझ पाता है कि वह क्या करने जा रहा है, तो हम कहते हैं कि वह किसी परियोजना की पूर्ति के लिए कार्य कर रहा है। परियोजना ही व्यक्ति के चिंतन को संगठित करती है। किलपैट्रिक महोदय के शब्दों में- "Whenever an individual starts off on a certain line and sees himself what he is going to do, he is working on a project."

'परियोजना पद्धति' का निर्माण इसीलिए किया गया, ताकि विद्यार्थियों को वास्तविक शिक्षा मिल सके, वे सक्रिय होकर विषय ज्ञान प्राप्त कर सके, उन्हें चिंतन तथा तर्क करने का अवसर मिल सके, उनका पाठ्यक्रम, उनकी रुचियों, अभिरुचियों तथा आवश्यकताओं पर निर्धारित हो सके तथा उन्हें सामाजिक दृष्टिकोण के आधार पर शिक्षा दी जा सके। इस पद्धति में बालक की क्रियाशीलता को प्रधानता दी जाती है। इसीलिए कहा जाता है- 'Project indicates purposeful activity'. इस पद्धति के अनुसार कार्य करने में बालक रूचि लेता है और अपने उत्तरदायित्व को पूर्ण रूप से समझता है।

2.5.10. प्रयोगशाला विधि (Laboratory Method)

आधुनिक शिक्षा प्रणाली में प्रत्येक विद्यालय में गणित कक्षाओं के लिए प्रयोगशाला अनिवार्य है। विद्यार्थी प्रयोगशाला में स्वाभाविक परिस्थितियों के बीच प्रयोग करते है। वे प्रयोग संबंधी गणनाओं को अपनी उत्तर पुस्तिकाओं पर रिकॉर्ड करते हैं। यदि प्रयोग करते समय कोई शंका पैदा होती है तो शिक्षक, तुरंत उसका समाधान करता है। इस विधि में छात्रों को व्यक्तिगत रूप से प्रत्यक्ष अनुभवों द्वारा स्वयं तथ्यों से परिचित होने का अवसर दिया जाता है। बालकों से स्वयं ही गणित के नियमों एवं तथ्यों की प्रयोगों की सहायता से जाँच करायी जाती है। इस विधि को अपनाने के लिए एक प्रयोगशाला की आवश्यकता होती है, जिसमे गणित संबंधी उपकरण तथा अन्य उपयोगी सहायक सामग्री की व्यवस्था रहती है।

कार्य विधि

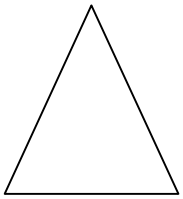
इस प्रकार छात्र स्वयं व्यक्तिगत रूप से प्रयोगशाला में प्रयोग करते हैं और प्रत्यक्ष अनुभवों द्वारा ज्ञान प्राप्त करते हैं। वे स्वयं प्रेक्षण, निरीक्षण एवं गणना द्वारा परिणाम निकालते हैं तथा कोई नियम अथवा सिद्धांत का स्वयं अपने शब्दों में प्रतिपादन करते हैं। शिक्षक समय-समय पर छात्रों के कार्यों का निरीक्षण करता है तथा आवश्यकतानुसार वह छात्रों को निर्देश देकर उनका मार्ग-प्रदर्शन करता है। इसलिए इस विधि में छात्रों के साथ-साथ शिक्षक को भी सक्रिय रहना पड़ता है, क्योंकि उसे सभी विद्यार्थियों के कार्य का निरीक्षण एवं मार्गदर्शन करना होता है। इस विधि में विद्यार्थी स्वयं सक्रिय रहकर किसी निष्कर्ष पर पहुँचते हैं, जिससे उनकी रचनात्मक एवं अन्वेषणात्मक शक्तियों का विकास होता है। यह विधि अन्य विधियों की अपेक्षा अधिक उपयोगी एवं वैज्ञानिक है।

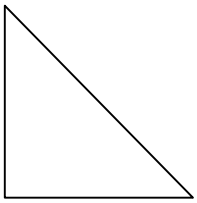
उदाहरण- "त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण या 180^0 के बराबर होता है।" प्रयोगशाला में इसे हम निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं:

उद्देश्य: सिद्ध करना कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण या 180^0 के बराबर होता है।

उपकरण: गत्ते या कार्डशीट, पेन्सिल, स्केल, चांदा आदि अन्य आवश्यक उपकरण।

विधि: प्रयोगशाला में विद्यार्थियों को एक-एक गत्ता या कार्डशीट दे दी जाएगी। तत्पश्चात उनको उस पर विभिन्न प्रकार के त्रिभुज बनाने को कहा जाएगा। त्रिभुज बनाने के बाद छात्रों से उनकों कैंची की सहायता से सफाई से अलग-अलग कटवा लिया जाएगा।





निरीक्षण: बनाए गए त्रिभुजों के कोणों को मापेंगे तथा उनकी मापों को एक तालिका में अंकित कर लेंगे।
गणना: त्रिभुजों को मापने के पश्चात् प्रदन्त मापों के अनुसार विभिन्न प्रकार के त्रिभुज के कोणों की गणना करके उनका योग ज्ञात करेंगें।
परिणाम: इस प्रकार त्रिभुज के तीनों कोणों का योग ज्ञात करके आगमन चिंतन द्वारा छात्र यह निष्कर्ष निकाल सकेंगे कि किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 अथवा दो समकोण के बराबर होता है। प्राप्त परिणाम का छात्र सामान्यीकरण कर लेंगे।

अपनी प्रगति की जाँच करें

6. गणित शिक्षण में प्रयोगशाला की उपयोगिता का विस्तारपूर्वक उल्लेख करें।

.....

.....

2.6.0 सारांश

गणितीय संप्रत्यय सीखने में पियाजे, ब्रुनर और वाइगोटस्की के संज्ञानात्मक सिद्धांत का अपना महत्व है। पियाजे ने इसे चार अवस्थाओं में विभाजित किया है। ब्रुनर के अनुसार बालकों में संगठनात्मक विकास में सक्रियता, दृश्य प्रतिमा तथा सांकेतिक का महत्वपूर्ण स्थान है। वाइगोटस्की के अनुसार सामाजिक कारकों और भाषा को महत्वपूर्ण कारक माना गया है। शैक्षिक विश्लेषण करने पर हम विषय वस्तु तथा प्रसंगों को प्रभावी तरीके से पढ़ा सकते है तथा यह उपयुक्त शिक्षण विधियों के चयन में भी मददगार साबित होता है। विभिन्न शिक्षण विधियों का ज्ञान हमें गणितीय प्रसंग के अनुसार करना चाहिए। अंकगणित, बीजगणित और रेखागणित के विभिन्न प्रसंग में इनका अलग-अलग उपयोग किया जा सकता है, जिससे कि शिक्षण को प्रभावी बनाया जा सके।

2.7.0 अपनी प्रगति के लिए अपेक्षित उत्तर

1. 2.3.1 जीन पियाजे

2. 2.3.3 वाइगोटस्की

3. 2.4.3 पेडागोजिकल विश्लेषण (Pedagogical Analysis) प्रकरण: समुच्चय

4. 2.5.2 आगमन विधि एवं 2.5.3 निगमन विधि

5. 2.5.4 विश्लेषण विधि एवं 2.5.5 संश्लेषण विधि

6. 2.5.10. प्रयोगशाला विधि

2.8.0 संदर्भ पुस्तकें

- सिंह, योगेश कुमार (2010). गणित शिक्षण: आधुनिक पद्धतियाँ. नई दिल्ली: ए.पी.एच. पब्लिशिंग हाउस.
- मंगल, एस.के. (2005). गणित शिक्षण. नई दिल्ली: आर्य बुक डिपो
- नेगी, जे.एस. (2007). गणित शिक्षण. आगरा: विनोद पुस्तक मंदिर
- कुलश्रेष्ठ, ए.के. (2007). गणित शिक्षण. मेरठ: आर. लाल बुक डिपो
- The Teaching of Mathematics by I.W.A. Young.
- The Teaching of Mathematics by K.S. Sidu.
- AMT-01. Teaching Mathematics. IGNOU Series.
- Boyer, C. B. (1968). History of Mathematics. New York: John Wiley.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-49.
- Devlin K. (2011). Introduction to Mathematical thinking. Ernest P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education.

इकाई-3
पाठ्यक्रम और योजना

इकाई की संरचना

3.1.0 उद्देश्य

3.2.0 प्रस्तावना

3.3.0 इकाई योजना तथा उसका प्रारूप

- **3.3.1 इकाई योजना की परिभाषा**
- **3.3.2 इकाई-योजना की विशेषताएँ**
- **3.3.3 इकाई योजना के उद्देश्य**
- **3.3.4 इकाई योजना के गुण**
- **3.3.5 इकाई योजना के दोष**
- **3.3.6 इकाई परीक्षण का प्रारूप**
- **अपनी प्रगति की जाँच करें**

3.4.0 पाठ योजना

- **3.4.1 पाठ-योजना का आशय एवं परिभाषाएँ**
- **3.4.2 अच्छी पाठ-योजना की विशेषताएँ**
- **3.4.3 पाठ योजना की आवश्यकता**
- **3.4.4 पाठ योजना का महत्व**
- **3.4.5 पाठ योजना का निर्माण**
- **अपनी प्रगति की जाँच करें**

3.5.0 माध्यमिक स्तर के गणित के विभिन्न विषयों के लिए उपयुक्त निर्देशन युक्तिओं का चयन करना:

- **3.5.1 अंकगणित-शिक्षण**
- **अपनी प्रगति की जाँच करें**
- **3.5.2 बीजगणित-शिक्षण**
- **अपनी प्रगति की जाँच करें**
- **3.5.3 रेखागणित शिक्षण**
- **अपनी प्रगति की जाँच करें**
- **3.5.4 त्रिकोणमिति शिक्षण**
- **3.5.5 सांख्यिकी शिक्षण**
- **अपनी प्रगति की जाँच करें**

3.6.0 सारांश

3.7.0 अपनी प्रगति के लिए अपेक्षित उत्तर

3.8.0 संदर्भ पुस्तकें

3.1.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के उपरांत आप:

- इकाई योजना का निर्माण करना सीख पाएँगे।
- पाठ योजना का निर्माण करना सीख पाएँगे।
- अंकगणित शिक्षण के लिए उपयुक्त शिक्षण विधियों का चयन कर पाएँगे।
- बीजगणित शिक्षण के लिए उपयुक्त निर्देशन युक्तियों का चयन कर पाएँगे।
- रेखागणित शिक्षण के लिए उपयुक्त निर्देशन युक्तियों का चयन कर पाएँगे।
- गणित के अन्य प्रसंगों जैसे त्रिकोणमिति एवं सांख्यिकी के लिए उपयुक्त शिक्षण युक्तियों का चयन कर पाएँगे।
- गणित के विभिन्न शाखाओं के शिक्षण के महत्व और उपयोगिता को समझ पाने में सक्षम हो सकेंगे।

3.2.0 प्रस्तावना

किसी भी कार्य को सफलतापूर्वक पूरा करने के लिए उनकी योजना बनाई जाती है जिसे नील पत्र या कार्य योजना 'Plan of Action' कहते है। गणित शिक्षण में भी विषय वस्तु का संगठन, उसकी क्रमबद्धता, उसके लिए अधिगम-अनुभव आदि के बारे में विचार करके एक वृहत योजना निर्धारित कर ली जाती है तथा योजना के मूल्यांकन हेतु परीक्षणों को भी सम्मिलित कर लिया जाता है। कार्य योजना तैयार करने से मानव तथा भौतिक संसाधनों के सदुपयोग के साथ-साथ समय का भी उपयोग अधिकतम उपलब्धि के लिए होता है। इससे अध्यापन कार्य में सुविधा एवं सरलता आ जाती है।

योजना के स्तर: गणित शिक्षक निर्धारित पाठ्यक्रम को आधार मानकर निम्नलिखित योजना बना सकता है।

अ) वार्षिक सत्रीय योजना

ब) मासिक योजना

स) साप्ताहिक योजना

द) दैनिक योजना

3.3.0 इकाई योजना तथा उसका प्रारूप

गणित शिक्षक संपूर्ण पाठ्य वस्तु को शिक्षण इकाइयों में दैनिक पाठ के लिए प्रकरणों का चयन क्रमबद्धता के साथ करता है।

3.3.1 इकाई योजना की परिभाषा

इकाई पाठ योजना किसी अमुक प्रकरण से संबंधित अनुदेशन को संगठित करने की विधा है। इकाई योजना किसी चयनित प्रकरण पर दो तीन सप्ताह के लिए चलने वाली अंत:संबंधित पाठ योजनाओं की रूप रेखा है। इकाई का अर्थ एक प्रयोजना या एक मूल समस्या के आस-पास संगठित इन विभिन्न क्रियाकलापों, अनुभवों तथा अधिगम सामग्री से है, जिसे शिक्षक के नेतृत्व में विद्यार्थियों के एक समूह विशेष के सहयोग से लाया जाता है। इकाई शब्द को शिक्षा में लाने का श्रेय हरबर्ट को है। जिस प्रकार हम किसी एक शीर्षक अथवा खण्ड को पढ़ाने के लिए कालांश के लिए दैनिक पाठ योजना बनाते हैं, उसी प्रकार पूरे अध्याय को कितने शीर्षकों के अंतर्गत कितने कालांशों में तथा किस-किस दिन पढ़ाया जाए, इसके लिए इकाई योजना बनाते हैं।

इकाई पाठ योजना संपूर्ण शिक्षण प्रक्रिया का स्पष्ट चित्रण होती है। पाठ्यक्रम का विषय समान उद्देश्यों की प्राप्ति हेतु योजनाबद्ध कार्य करने की दृष्टि से कुछ इकाइयों में विभाजित कर लिया जाता है। अर्थात् एक ही आधार पर आधारित विभिन्न पाठों को एकत्र कर लिया जाता है। फिर इन पाठों को इकाई मानकर विभिन्न पाठ्यांश बनाए जाते हैं। इस एक इकाई के पाठ्यांश पर हम एक सप्ताह तक बालकों से कार्य करवा सकते हैं। इस योजना को हम इकाई योजना कहते हैं।

एम. रिस्क के अनुसार- "इकाई में पूर्व नियोजित अनुभव और क्रियाएँ निहित हैं और वह किसी समस्या, परिस्थिति, रूचि या वांछित परिणाम पर आधारित होती हैं।"

मॉरिसन के अनुसार- "इकाई-वातावरण, संगठित विज्ञान, कला या आचरण का व्यापक एवं महत्वपूर्ण अंग है, जिसे सीखने से व्यक्तित्व में सामंजस्य आ जाता है।"

प्रिस्टन के अनुसार, "सीखने वाले विहंगम दृष्टि से अंतर्संबंधित विषय-वस्तु के बड़े खंड को इकाई कहते हैं।"

3.3.2 इकाई-योजना की विशेषताएँ

1. इकाई-योजना में विषय वस्तु की दृष्टि में समग्रता होती हैं, जो एक महत्वपूर्ण अनुभव पर आधारित होती है।
2. ज्ञान, अवबोध, ज्ञानोपयोगी, अभिरुचि, अभिवृति व कौशल संबंधी सभी निर्धारित उद्देश्यों की पूर्ति इकाई योजना के शिक्षण द्वारा ही संभव होती है।
3. इसके विभिन्न पाठों के शिक्षण में भिन्न-भिन्न विधियों, प्रविधियों का प्रयोग किया जा सकता है, जिससे अधिगम सरल एवं प्रभावी बनता है।
4. इसमें मनोवैज्ञानिक सिद्धांत 'संपूर्ण से अंश की ओर' का पालन होता है।
5. यह संपूर्ण सत्र के पाठ्यक्रम हेतु बनाई गई वार्षिक योजना तथा दैनिक पाठ-योजना को संलग्न करने का महत्वपूर्ण कार्य करती है।
6. इकाई योजना ही दैनिक-पाठों के शिक्षण हेतु शैक्षिक मार्गदर्शन करती है।

3.3.3 इकाई योजना के उद्देश्य

इकाई योजना के निम्नलिखित उद्देश्य होते हैं-

1. पाठ्य-सामग्री को सरल एवं व्यावहारिक रूप प्रदान करना।
2. छात्रों की आवश्यकताओं व रुचियों के अनुसार पाठ्यवस्तु को संगठित करना।
3. छात्रों को ज्ञानार्जन के लिए अभिप्रेरित करना।
4. पाठ्य-वस्तु का इकाइयों के आधार पर उद्देश्य, शिक्षण विधि, सहायक सामग्री, मूल्यांकन आदि का निर्धारण करना।
5. किसी एक समस्या पर केंद्रित विषय-वस्तु को विभिन्न घटकों में विभाजित करना।
6. दैनिक पाठ-योजनाओं के लिए सुनियोजित आधार प्रस्तुत करना।

3.3.4 इकाई योजना के गुण

इकाई योजना के निम्नलिखित गुण हैं-

1) इकाई योजना में छात्र सामान्य नियम बनाते हैं। सामान्यीकरण के कारण उनमें तर्क, चिंतन एवं विचार शक्ति का विकास होता है।
1) इकाई पद्धति छात्रों के ज्ञान का विस्तार करती है।
2) इकाई-योजना छात्रों में स्वाध्याय की प्रवृत्ति को प्रेरित करती है।
3) इकाई-योजना द्वारा पाठ्यक्रम को समय पर पूर्ण कराया जा सकता है क्योंकि शिक्षक को इस हेतु आवश्यक समय की जानकारी हो जाती है।
4) इकाई-योजना में लोकप्रियता का गुण होता है। अत: बालकों को वैयक्तिक विभिन्नता के अनुसार शिक्षा दी जा सकती है। इसका आधार प्रजातंत्र का सिद्धांत है।
7) इकाई योजना के द्वारा विषय-वस्तु का संगठन अच्छी प्रकार हो जाता है।
8) इस पद्धति से समाज एवं व्यक्ति के मध्य सामंजस्य स्थापित करने में सहायता मिलती है।
9) इकाई योजना का आधार पूर्णतया मनोवैज्ञानिक है। इसमें बालकों की रुचियों व आवश्यकताओं का ध्यान रखा जाता है।
5) यह पद्धति प्रारंभिक कक्षा के बालकों के लिए विशेष रूप से उपयोगी सिद्ध होती है।

3.3.5 इकाई योजना के दोष

इकाई-योजना में निम्नलिखित दोष हैं-

1) इकाई योजना के अनुसार शिक्षण कराने से शिक्षण कार्य यंत्रवत हो जाता है। फलत: शिक्षण अरुचिपूर्ण हो जाता है।
1) इकाई-योजना के माध्यम से पढ़ाने के लिए पूर्णतया प्रशिक्षित अध्यापकों की आवश्यकता पड़ती है।
2) इकाई-योजना तैयार करना भी एक कठिन कार्य है।
3) इकाई-योजना में सहायक सामग्री एवं अन्य उपकरणों के प्रयोग पर बल दिया जाता है। अत: इसमें धन की
4) अधिक आवश्यकता पड़ती है।

3.3.6 इकाई परीक्षण का प्रारूप

इकाई योजनानुसार शिक्षण करने के पश्चात् यह पता करने के लिए कि छात्रों ने उस इकाई को कहाँ तक तथा कितना सीख लिया है? अध्यापक के प्रयास कितने सफल रहे? इन सभी की जाँच करने के लिए उस इकाई से संबंधित एक परीक्षण बनाया जाता है जिसमें इकाई की संपूर्ण विषय-वस्तु (उप-इकाइयों) को सम्मिलित किया जाता है। उस परीक्षण को इकाई परीक्षण कहते हैं। इस परीक्षण में विभिन्न उद्देश्यों, उप-इकाईयों तथा प्रश्नों के प्रकार को अंकों के संदर्भ में भार दिया जाता है। विभिन्न पहलुओं को भार देना तथा व्यावहारिक रूप में लिखने के ढंग को नील-परख-पत्र(Blue-Print) कहते हैं, जो कि विभिन्न उद्देश्यों, विषय-वस्तु के विभिन्न पहलुओं तथा प्रश्नों के आधार पर अंकों का वितरण प्रस्तुत करता है। इस प्रकार इकाई परीक्षण बनाते समय नील-परख-पत्र में तीन प्रकार से अंकों का वितरण किया जाता है, जिसके आधार पर इकाई परीक्षण के लिए प्रश्नों का निर्माण किया जाता है। तत्पश्चात परीक्षण का प्रशासन किया जाता है।

1) उद्देश्यों को अंक भार
2) उप-इकाइयों को अंक भार
3) प्रश्नों के प्रकारों को अंक भार

इकाई-योजना का प्रारूप

विद्यालय का नाम-..... विषय-.....

कक्षा-..... अपेक्षित कालांश.....

इकाई का नाम..... इकाई का मुख्य उद्देश्य.....

क्र.सं.	विषय वस्तु	अध्यापन बिंदु	छात्र अध्यापक क्रियाएँ	अपेक्षित कालांशों की संख्या	शिक्षण सहायक सामग्री की सभी पुस्तकों के नाम	मूल्यांकन के प्रकार, कक्षा कार्य	गृहकार्य	विशेष विवरण

अपनी प्रगति की जाँच करें

1. कक्षा 6 की गणित पाठ्य-पुस्तक के किसी इकाई के शिक्षण के लिए इकाई योजना बनाएँ।

.....
.....

3.4.0 पाठ योजना

कक्षा कार्य की पूर्व लिखित योजना, जिसमें शिक्षक उद्देश्य प्राप्ति के लिए प्रयोग की जाने वाली विधियों को निश्चित करता है, पाठ-योजना कहलाती है। पाठ-योजना में सामान्य विज्ञान का अध्यापक पाठ्यवस्तु के अनुरूप शिक्षण उद्देश्यों को व्यवहारगत परिवर्तन के रूप में निर्धारित करता है। उन शिक्षण उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए अध्यापक पाठ्य-वस्तु को जिस क्रम में तथा जिस प्रकार प्रस्तुत करेगा उसको भी निर्धारित करता है।

3.4.1 पाठ-योजना का आशय एवं परिभाषाएँ

साधारणत: अध्यापन के लिए विषय-वस्तु की एक विस्तृत योजना तैयार करने को ही पाठ योजना कहा जाता है।

आई. के डेवीज के अनुसार- "शिक्षण अधिगम व्यवस्था के सभी पक्षों (अदा, प्रक्रिया व् प्रदा) को व्यावहारिक रूप में प्रस्तुत करने का आलेख ही 'पाठ योजना' है।"

पाठ योजना को और अधिक स्पष्ट करते हुए **प्रो. बी. डी. भाटिया** एवं **के. भाटिया** लिखते है, "पाठ योजना इस बात का निर्देश करती है कि अब तक क्या किया जा चूका है, अगली बार छात्रों को किस दिशा में निर्देश देना चाहिए, और कौन से कार्य तुरंत क्रियान्वित करना है। यह प्राप्य उद्देश्यों और उन विशिष्ट साधनों का जिनके माध्यम से उस कालांश के दौरान, जो कि छात्र और अध्यापक एक साथ व्यतीत करते हैं, की जाने वाली क्रियाओं के परिणाम के फलस्वरूप प्राप्त होते हैं, उल्लेख है।"

बिनिंग और **बिनिंग** के अनुसार, "दैनिक पाठ योजनाओं के निर्माण में उद्देश्यों को परिभाषित करना, पाठ्य वस्तु का चुनाव एवं उसको क्रमबद्ध रूप में रखना तथा प्रस्तुत करने की विधियों का निर्धारण करना हैं।"

3.4.2 अच्छी पाठ-योजना की विशेषताएँ

1. **उद्देश्य आधारित**- पाठ योजना किसी न किसी उद्देश्यों पर आधारित होनी चाहिए।
2. **पूर्व ज्ञान पर आधारित**- एक अच्छी पाठ योजना छात्रों के पूर्व ज्ञान पर आधारित होनी चाहिए। इससे छात्रों को नवीन ज्ञान को ग्रहण करने में कोई कठिनाई नहीं होगी। वे सफलतापूर्वक सीखते हैं।
3. **क्रियाओं पर आधारित**- पाठ योजना में यह बात स्पष्ट कर देनी चाहिए कि शिक्षण के प्रत्येक पद पर शिक्षक तथा छात्रों को कौन सी क्रियाएँ करनी हैं।
4. **उदाहरणों का प्रयोग**- पाठ योजना में ऐसे उदाहरणों का प्रयोग होना चाहिए जिसका संबंध विद्यार्थियों के दैनिक जीवन से हो।
5. **शिक्षण स्मृति स्तर से चिंतन स्तर तक**- पाठ योजना में विकासात्मक तथा विचारात्मक प्रश्नों का प्रयोग करना चाहिए। साथ ही शिक्षण कार्य को स्मृति स्तर से चिंतन स्तर तक पहुँचाने का प्रयास करना चाहिए।
6. **समय का ध्यान**- पाठ योजना विद्यार्थियों के मानसिक स्तर का तथा कालांश की अवधि को ध्यान में रखकर बनाना चाहिए।
7. **श्यामपट्ट का प्रयोग**- पाठ योजना में श्यामपट्ट सारांश पाठ के विकास के साथ-साथ होना चाहिए।
8. **मूल्यांकन**- पाठ-योजना में छात्रों पर पड़े हुए प्रभाव को जानने अर्थात मूल्यांकन की विधि का भी उल्लेख होना चाहिए।

9. **गृहकार्य**- पाठ-योजना में गृहकार्य की व्यवस्था होनी चाहिए। इससे छात्र अर्जित किया हुआ ज्ञान का उचित प्रयोग करना सीख जाएंगें।

3.4.3 पाठ योजना की आवश्यकता

पाठ योजना की आवश्यकता निम्न कारणों से होती हैं-

1. पाठ योजना शिक्षण लक्ष्यों के स्पष्टीकरण एवं निर्धारण में सहायक है।
2. पाठ-योजना के माध्यम से छात्रों के मानसिक विकास, रूचि और ज्ञान के अनुरूप पाठ्यवस्तु का प्रस्तुतीकरण, तार्किक, क्रमबद्ध तथा प्रभावशाली ढंग से हो सकता है।
3. पाठ-योजना शिक्षण प्रक्रिया को प्रभावशाली बनाने में सहायक है।
4. पाठ-योजना के माध्यम से श्रम, समय और साधनों की बचत होती है। इस प्रकार सीमित साधनों द्वारा समुचित शिक्षा प्रदान करना संभव होता है।
5. इससे विभिन्न कठिन शब्दों, तथ्यों, विचारों, संप्रत्ययों आदि के स्पष्टीकरण में आने वाली कठिनाई का पूर्वानुमान हो जाता है। इन कठिनाइयों के निराकरण के लिए अध्यापक पाठ-योजना में विभिन्न प्रकार के शिक्षण साधनों को निहित कर लेता है जिनके द्वारा शिक्षण प्रक्रिया अधिक प्रभावपूर्ण हो जाती है और शिक्षण में विषय परिस्थिति उत्पन्न नहीं होती, फलत: विषय में छात्रों की रूचि स्वत: ही विकसित हो जाती है।
6. अच्छी पाठ योजना में कक्षा संगठन, शिक्षण साधनों की विविधता, विषय के शिक्षण लक्ष्यों आदि अध्यापक के व्यक्तित्व के परिचायक हैं।
7. पाठ-योजना अध्यापक को विभिन्न शिक्षण विधियों एवं स्वयं के विचारों को प्रयोग के अवसर प्रदान करती हैं। इसी के द्वारा अध्यापक को आत्म-विश्वास के निर्माण का अवसर भी प्राप्त होता है।
8. पाठ-योजना से अध्यापक पाठ के अंत में मूल्यांकन द्वारा स्वयं पता लगा सकता है कि उसकी शिक्षण-योजना इतनी सफल हुई है।
9. अपनी क्षमता, उपलब्ध साधनों तथा छात्रों के मानसिक स्तर को ध्यान में रखते हुए विषय के शिक्षण लक्ष्यों को प्राप्त करने के लिए शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में सुधार करने का अवसर भी पाठ-योजना प्रदान करती है। इसके द्वारा विधिवत् शिक्षण पूरा हो पाता है, जिससे आत्मविश्वास उत्पन्न होता है।

3.4.4 पाठ योजना का महत्व

पाठ-योजना के महत्व के निम्नलिखित बिंदु हैं-

1) पाठ योजना द्वारा शिक्षक को सफल शिक्षण के लिए पूर्व विचार एवं चिंतन का अवसर मिलता है। विषय-वस्तु को प्रभावी एवं मनोवैज्ञानिक ढंग से प्रस्तुत किया जाता है।
2) इसके द्वारा बालकों के पूर्व-ज्ञान के आधार पर शिक्षण में सफलता प्राप्त होती है। शिक्षण कार्य में क्रमबद्धता एवं नियमितता आती है।
3) बालकों को इसके द्वारा स्थायी ज्ञान की प्राप्ति होती है।
4) इसके द्वारा शिक्षक को उद्देश्यनिष्ठ बनाया जा सकता है।

5) इसके द्वारा शिक्षण सामग्री का पूर्णरूपेण उपयोग किया जाता है तथा प्रदत्त ज्ञान का मूल्यांकन किया जा सकता है।
6) पाठ योजना बनाने से अध्यापक विश्वास, दृढ़ता एवं अधिकार से कक्षा में शिक्षण कर सकता है। पाठ योजना शिक्षण को रोचक व आकर्षक बनाती हैं।
7) पाठ योजना छात्रों के व्यवहारों को अभिप्रेरित एवं नियंत्रित करने में सहायक हैं।
8) पाठ योजना छात्रों की वैयक्तिक विभिन्नताओं का समुचित उपयोग करने में सहायक हैं।

3.4.5 पाठ योजना का निर्माण

पाठ योजना निर्माण के मुख्य चार पद होते हैं-
1) उद्देश्य 2) पाठ्यवस्तु विश्लेषण 3)अधिगम अनुभवों का चयन, संगठन व नियोजित, तथा 4) मूल्यांकन।

'दैनिक पाठ योजना' के निर्माण में निम्नलिखित पदों का समावेश किया जाता हैं-
1) पाठ योजना की क्रम संख्या, 2) दिनांक, 3) कक्षा एवं वर्ग, 4) कालांश, 5)अवधि, 6)विषय, 7)उपविषय या प्रकरण, 8)विद्यालय का नाम, 9) छात्राध्यापक का नाम, 10) सामान्य उद्देश्य, 11) विशिष्ट उद्देश्य, 12) अधिगम सामग्री, 13) पूर्व-ज्ञान, 14)प्रस्तावना, 15)उद्देश्य कथन, 16)प्रस्तुतीकरण, 17)बोध प्रश्न, 18) श्यामपट्ट सारांश, 19) पुनरावृति तथा मूल्यांकन, 20) गृह कार्य।

पाठ योजना- 1

दिनांक..... **कक्षा- 7'B'**
विषय-गणित **अवधि-40 मिनट**
प्रकरण- पाइथागोरस प्रमेय (साध्य) **कालांश- पंचम**
सहायक सामग्री-

1) साधारण कक्षा-कक्ष की सामग्री जैसे श्यामपट्ट, चौंक, डस्टर, संकेतक आदि।
2) एक चार्ट और मॉडल जिसमें कमल के फूल संबंधी समस्या को चिन्हित किया जाता है।
3) दूसरा चार्ट जिसमें गली तथा सीढी से संबंधित समस्या को दिखाया गया है।
4) तीसरा चार्ट जिसमें दो बांसों से संबंधित समस्या को चित्रित किया गया है।

सामान्य उद्देश्य

1. विद्यार्थियों के तर्क शक्ति, विचार शक्ति तथा कल्पना शक्ति का गणित की समस्याओं द्वारा विकसित करना।
2. रेखागणित के अध्ययन के प्रति रूचि उत्पन्न करना और रेखागणित संबंधी नियमों से परिचित कराना।
3. छात्रों की रचनात्मक शक्ति को विकसित करने का अवसर प्रदान करना।
4. गणित के ज्ञान को व्यावहारिक जीवन में उपयोग कर सकने की सामर्थ्य उत्पन्न करना।

विशिष्ट उद्देश्य

1) पाइथागोरस प्रमेय का ज्ञान कराना।

2) पाइथागोरस प्रमेय पर आधारित कुछ व्यावहारिक समस्याओं को हल करने योग्य बनाना।

पूर्व ज्ञान

1) विद्यार्थी समकोण त्रिभुज से भली-भाँति परिचित हैं।

2) वे यह जानते हैं कि "समकोण त्रिभुज के कर्ण पर वर्ग शेष दोनों भुजाओं के वर्गों के योग के तुल्य होता है।"

प्रस्तावना

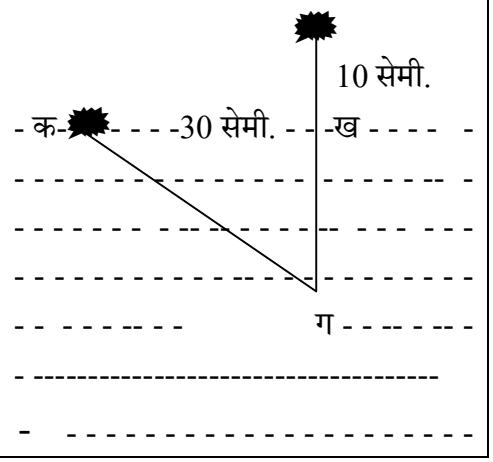
छात्राध्यापक क्रियाशीलन	छात्र क्रियाशीलन
1. (समकोण त्रिभुज की आकृति दिखाते हुए) यह किस प्रकार के त्रिभुज की आकृति है?	समकोण त्रिभुज
2. (विभिन्न भुजाओं को बारी-बारी से इंगित करते हुए) इसे किस-किस नाम से जाना जाता है?	लंब, आधार और कर्ण
3. समकोण त्रिभुज की इन भुजाओं में क्या संबंध होता है?	$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लंब})^2 + (\text{आधार})^2$
4. भुजाओं में इस प्रकार के संबंध की खोज किसने की थी?	पाइथागोरस ने
5. एक मनुष्य 40 मीटर पूर्व की ओर चला और फिर 9 मीटर उत्तर की ओर गया बताओ वह चलने के स्थान से कितनी दूर है?	समस्यात्मक

उद्देश्य कथन- अंतिम प्रश्न का उत्तर संतोषजनक नही पाकर यह घोषित किया जाएगा कि आज हम पाइथागोरस के प्रमेय पर आधारित इसी प्रकार की कुछ कठिन समस्याओं पर विचार करेंगें।

प्रस्तुति

छात्रों के सम्मुख एक साध्य प्रस्तुत की जाएगी।

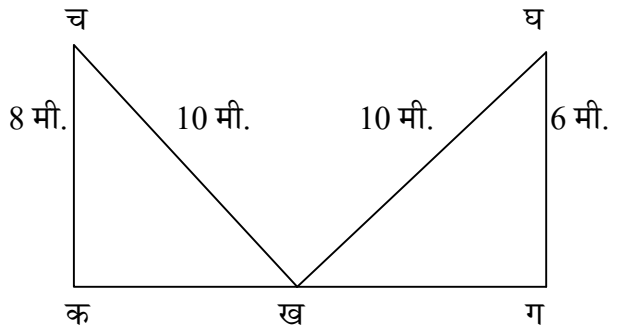
"एक तालाब में कमल का फूल पानी से 10 सेमी. ऊँचा है। हवा के झोंके से वह पानी तल को 30 सेमी. की दूरी पर स्पर्श करता है। पानी में रखी कमल की डंडी की लंबाई ज्ञात करो।"

शिक्षक-क्रियाशीलन	छात्र-क्रियाशीलन	श्यामपट्ट-कार्य
1. इस समस्या में क्या ज्ञात करना है? 2. इसमें क्या दिया हुआ है? 3. इस समस्या को कैसे हल	पानी में खड़ी कमल की डंडी की लंबाई। एक तालाब में कमल का फूल पानी से 10 सेमी. ऊँचा है तथा वह हवा के झोंके से पानी के तल को 30 सेमी. की दूरी पर स्पर्श करता है। छात्र तत्काल ही इस प्रश्न का उत्तर नहीं दे सकेंगे। अत: छात्रों	

करोगे।	का ध्यान श्यामपट्ट/ चार्ट की ओर आकर्षित किया जाएगा।	-- - - - - -- -- - -
4. चार्ट में फूल की दूसरी स्थिति किस रेखा द्वारा दिखाई गई है।	क ग रेखा द्वारा दिखाई गई है।	- - - - - - - - - - - - - -- - - - - - - - - -- - - -
5. झुकने पर पानी को स्पर्श करने की दूरी किस रेखा द्वारा दिखाई गई है?	क ख द्वारा।	- -
6. पानी में खड़ी कमल की डंडी की लंबाई किस रेखा द्वारा प्रदर्शित की गई है?	ख ग द्वारा।	
7. अब चित्र को देखकर पता लगाओ कि खड़ी कमल की डंडी की लंबाई कैसे निकाली जा सकती है।	वह समकोण त्रिभुज है। हम पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं।	
8. पाइथागोरस के प्रमेय द्वारा त्रिभुज का लंब कब ज्ञात कर सकते हैं?	जबकि आधार व कर्ण दिया हुआ हो।	
9. पानी के अंदर कमल की डंडी की लंबाई क्या मानोंगे?	इसे x मीटर माना जाएगा।	
10. कमल की डंडी की कुल लंबाई कितनी होगी?	कुल लंबाई (x+10) मीटर होगी।	
11. पाइथागोरस के प्रमेय का प्रयोग करते हुए x का मान कैसे ज्ञात करोगे?		अब छात्रों की सहायता से इसका आदर्श हल प्रस्तुत किया। $(\text{कर्ण})^2 = (\text{लंब})^2 + (\text{आधार})^2$ या $(x+10)^2=(30)^2+(x)^2$ या $x^2+20x+100=900+x^2$ या $20x=800$ या $x=40$ सेमी. पानी में खड़ी कमल की डंडी की लंबाई 40 सेमी. हुई।

दूसरी समस्या-

एक सीढी 10 मीटर लंबी है। सड़क की ओर दीवार पर रखने से वह 8 मीटर ऊँचाई तक पहुँचती है। उलट कर दूसरी ओर की दीवार पर रखने से वह 6 मीटर ऊँचाई तक पहुँचती है। सड़क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



छात्राध्यापक क्रियानुशीलन	छात्र क्रियानुशीलन	श्यामपट्ट कार्य
1. इस प्रश्न में क्या ज्ञात करना है?	सड़क की चौड़ाई।	
2. इस प्रश्न में क्या दिया हुआ है?	इसमें सीढी की लंबाई 10 मी. दी हुई है तथा दोनों ओर की दीवारों पर रखने से क्रमश: 8 मी. व 6 मी. तक ऊँचाई पर पहुँचती है।	
3. इस समस्या को कैसे हल करोगे?	छात्र तुरंत उत्तर नहीं देंगे। अत: अध्यापक पुन: छात्रों को चार्ट की तरफ आकर्षित करेगा।	
4. चार्ट में सड़क की चौड़ाई किस रेखा द्वारा दिखाई गई है?	क ग रेखा द्वारा।	
5. सड़क की कुल चौड़ाई निकालने के लिए किस-किस	क ख व ख ग की चौड़ाई निकालनी होगी।	

भाग की चौड़ाई ज्ञात करनी होगी? 6. पाइथागोरस के सिद्धांत द्वारा दोनों भागों की चौड़ाई कैसे ज्ञात करोगे?		छात्राध्यापक छात्रों की सहायता से इसका आदर्श हल प्रस्तुत करेगा। Δ क ख च में $\therefore$ (ख च)^2= (क ख)^2 +(क च)^2 $\therefore$ (क ख)^2 = (ख च)^2-(क च)^2 =(10)^2-(8)^2 =100-64 =36 $\therefore$ क ख = $\sqrt{36}$ = 6 मी. इसी प्रकार, ख ग= 8 मी. सड़क की कुल चौड़ाई= 6+8=14 मी.

गृहकार्य-

1. एक रास्ते के दो किनारों पर दो बाँस 10 मी. तथा 18 मी. ऊँचे सीधे खड़े हैं। यदि उनकी चोटियों में जो रस्सी बाँधी गई है उसकी नाम के अनुसार चोटियों की दूरी 17 मीटर हो तो रास्ते की चौड़ाई बताइए।

अपनी प्रगति की जाँच करें

2. गणित के किसी प्रसंग (त्रिकोणमिति या क्षेत्रमिति) के लिए पाठ योजना का निर्माण कीजिए।

.....

.....

3.5.0 माध्यमिक स्तर के गणित के विभिन्न विषयों के लिए उपयुक्त निर्देशन युक्तियों का चयन करना:

3.5.1 अंकगणित-शिक्षण

अंकगणित अंकों या संख्याओं का विज्ञान है तथा गणना करने की कला है। ऐतिहासिक पृष्ठभूमि से ज्ञात होता है कि अंकगणित, गणित की सभी शाखाओं में प्राचीन है। गिनने के उद्देश्य को लेकर ही संभवत: गणित का

जन्म हुआ है। आज इसके महत्व से कोई भी परिचित नहीं है। विद्यालयों में अंकगणित का एक महत्वपूर्ण स्थान है। यहाँ हमारा मंतव्य गणित के प्राप्य उद्देश्य एवं उसकी शिक्षण विधियों के विषय में चर्चा करना है।

अंकगणित-शिक्षण के लक्ष्य

अंकगणित-शिक्षण के लक्ष्य निम्नलिखित हैं-

1) बालकों को इस प्रकार का प्रशिक्षण दिया जाए एवं तैयार किया जाए जिससे वे तथ्यों, आंकड़ों व सूचनाओं को समझ सकें या उनका अर्थ जान सकें।
2) छात्रों में विश्लेषण करने की क्षमता विकसित करना।
3) छात्रों में वातावरण के प्रति रूचि उत्पन्न करना।
1) 4)छात्रों में गणित कार्य में शीघ्रता तथा शुद्धता के प्रति सजगता एवं इसकी महत्ता को स्पष्ट करना।
4) छात्रों को इस बात के लिए तैयार करना कि उच्च शिक्षा में अंकगणित का महत्व क्यों है, जिससे अवगत होकर उनमें रूचि ले सकें।
5) छात्रों को ऐसे उदाहरणों एवं अभ्यासों के माध्यम से अंकगणित पढ़ाया जाए जिससे वे इसका व्यावहारिक रूप समझ सकें।
6) समस्याओं को तर्क एवं वितर्क के आधार पर हल करने की क्षमता विकसित करना।
7) नियमबध्द्ता, क्रमबद्धता तथा मौखिक कार्य के महत्व को स्पष्ट करके छात्रों में अच्छी आदतों का निर्माण करना।

अंकगणित की शिक्षण-विधि

प्रकरण-ऐकिक नियम- गणित में इकाई विधि या ऐकिक नियम का महत्वपूर्ण स्थान है। छात्रों को ऐकिक नियम के विषय में, अर्थात् इसकी धारणा, नियम व लिखने की विधि से पूर्णरूपेण परिचित कराना चाहिए। छात्र स्वयं ही इस बात से परिचित हैं कि ऐकिक नियम का प्रयोग दैनिक जीवन में कहाँ एवं कैसे करते हैं। इसके शिक्षण के समय भी छात्रों के सामने दैनिक जीवन के उदाहरण प्रस्तुत करने चाहिए। उदाहरण हेतु यह बताया जा सकता है कि-

1) बाजार में आजकल चीनी 6.20 रुपये प्रति किलोग्राम के भाव से बिकती है, 400 ग्राम खरीदने के लिए कितने पैसे देने पड़ेंगे?

प्रश्न-1. यदि संतरे का बहव 50 रुपये प्रति सैकड़ा है, तो 35 संतरों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

विधि- बच्चों के सम्मुख सर्वप्रथम प्रश्न पढ़कर सुनाया जाएगा एवं उनसे ज्ञात तथा अज्ञात राशियों के बारे में पूछा जाएगा। इसके पश्चात् उनसे 35 संतरों का मूल्य किस प्रकार ज्ञात किया जाएगा, इसके बारे में प्रश्न किए जाएंगे। ऐसे ही प्रश्न उनसे किए जाएंगे जिससे उन्हें यह ज्ञात हो जाए कि पहले उन्हें एक (इकाई) वस्तु का मूल्य ज्ञात होना जरूरी है।

उनसे पूछा जाएगा एक संतरे का मूल्य किस प्रकार मालूम करोगे? यहाँ यह मानकर चलते हैं कि छात्रों को इतना ज्ञात है कि " जब अधिक वस्तुओं की कीमत मालूम होती है और कम वस्तुओं की कीमत मालूम करनी होती है तब भाग करते हैं।" यह बात हम सहायक प्रश्नों द्वारा जान सकते हैं। इसके साथ ही यह भी मानकर चलते हैं कि

छात्रों को यह ज्ञात है कि "जब एक से अधिक वस्तुओं की कीमत मालूम करनी होती है तब गुणा करते हैं।" इसके पश्चात् ही उन्हें ऐकिक नियम की विधि से आदर्श हल बताना चाहिए।

हल-

ज्ञात है- 100 संतरे का मूल्य = 50 रुपये

ज्ञात करना है- 35 संतरे का मूल्य = ?

100 संतरों का मूल्य = 50 रुपये

∴ 1 संतरे का मूल्य = 50/100

∴ 35 संतरों का मूल्य = (50/100 x 35) रुपये

= 17.50 रुपये

अत: शिक्षण करते समय प्रारंभ में सरल उदाहरणों द्वारा उन्हें इकाई वस्तु का मूल्य ज्ञात करना बताया जाए। इसके उपरांत यह बताया जाए कि इसे इकाई की विधि या ऐकिक नियम की विधि कहा जाता है क्योंकि इसमें एक वस्तु (इकाई) का मूल्य ज्ञात करना आवश्यक होता है। एक वस्तु की कीमत जानकर ही अधिक वस्तुओं की कीमत जानी जाती है।

सोनेनचीन ने अंकगणित-शिक्षण के विभिन्न प्रकरणों को पढ़ाने के लिए अधोलिखित शिक्षण-विधियाँ बतलाई हैं-

अ) कंठस्थ विधि- इसमें शिक्षण किसी नियम से शुरू किया जाता है। इसमें पहले छात्र को नियम रटाया जाता है और बाद में उसका विभिन्न प्रश्नों में प्रयोग कराया जाता है। इस प्रकार यह विधि कठिन से सरल की ओर बढ़ती है।

आ) प्रदर्शनात्मक विधि- इसमे पहले नियम को सिद्ध किया जा रहा है और बाद में उससे (नियम से) कार्य कराया जाता है।

इ) खोज विधि- इसमें शिक्षक छात्रों को नियम या सिद्धांतों को खोजने के लिए तत्पर बनाता है। इसमें छात्रों को वास्तविक पदार्थों या स्थूल सामग्री के माध्यम से नियम खोजने का अवसर प्रदान किया जाता है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

3. अंकगणित-शिक्षण के उद्देश्यों पर प्रकाश डालें।

.....

.....

4. अंकगणित की शिक्षण विधियों को स्पष्ट करें।

.....

.....

3.5.2 बीजगणित-शिक्षण

Algebra शब्द एक अरबी शब्द Al-Jebr'al का अपभ्रंश है। इस शब्द का अर्थ है कि किसी समीकरण के एक ओर से कोई संख्या दूसरी ओर ले जाने में उसका चिन्ह बदल जाता है। बीजगणित का जन्म और विकास वास्तव

में अंकगणित में से ही हुआ है। बीजगणित भी अंकगणित की तरह संख्याओं का ही विज्ञान है। अंतर केवल इतना है कि बीजगणित में अंको के स्थान पर अक्षरों का प्रयोग होता है। बीजगणित में समस्या के समाधान के लिए दो प्रक्रियाओं से गुजरना होता है। वे इस प्रकार हैं-

1. बीजीकरण (Symbolisation)
2. सामान्यीकरण (Generalisation)

इन दोनों-प्रक्रियाओं के संयुक्त प्रयोग से अंकगणित के किसी तथ्य को अंकों से ही न प्रकट करके उसके स्थान पर बीजों अथवा चिन्हों से प्रकट करके अंकगणित के तथ्यों को विस्तृत और सामान्य रूप दिया जाता है।

बीजगणित की शिक्षा क्यों दी जाए?

बीजगणित क्यों पढ़ाया जाए, इसके उत्तर में निम्नलिखित विचार रखे जा सकते हैं-

1) बीजगणित के उपयोग से अंकगणित या गणित की कठिन समस्याओं को सरलता के साथ हल लिया जा सकता है।
2) उच्च गणित, गणित की सभी प्रमुख शाखाओं तथा विज्ञान में बीजगणित की पढ़ाई न केवल एक ठोस आधार का काम करती है, बल्कि नवीन दिशा दिखाने और इन क्षेत्रों में अत्यधिक प्रगति करने का श्रेय भी बीजगणित को ही है।
3) गणित के तथ्यों एवं संबंधों का अध्ययन करने के लिए बीजगणित नवीन भाषा और संकेतों की एक संक्षिप्त लिपि प्रदान करता है जिसकी सहायता से प्रश्नों को हल करने में सामान्य भाषा संबंधी अनिश्चितता और अस्पष्टता नहीं आ पाती।
4) सामान्य सूत्रों को विशेष परिस्थितियों में (विभिन्न समस्याओं को हल करने में) कैसे प्रयोग में लाया जा सकता है, बीजगणित द्वारा यह भी अच्छी तरह सीखा जा सकता है।
5) बीजगणित के अध्ययन से समस्याओं का सही-सही विश्लेषण करने की शक्ति आती है।
6) बीजगणित की एक प्रमुख विशेषता यह है कि इसमें गणित की अन्य शाखाओं की अपेक्षा परिणामों की सत्यता को आसानी से परखा जा सकता है।
7) बीजगणित की महत्ता इसके प्रयोगात्मक और व्यवहारात्मक मूल्य को लेकर भी है। औद्योगिक क्षेत्रों में भी इसका प्रयोग आवश्यक बनता जा रहा है।

बीजगणित-शिक्षण के उद्देश्य

1) सामान्यीकरण करने की योग्यता का विकास करना।
2) सूत्रों की उत्पति एवं उनके प्रयोग से दक्षता प्रदान करना।
3) बीजगणित के प्रयोगों से अंकगणित के कठिन प्रश्नों को सुगमता से हल करने का ज्ञान देना।
4) बीजगणित का प्रयोग अन्य विषयों की समस्याओं को हल करने के लिए प्रयोग में लाने के लिए प्रशिक्षित करना।
5) दैनिक जीवन की समस्याओं को बीजगणित द्वारा सुगमता से हल करके सिखाना।
6) भिन्न-भिन्न नवीन भाषा तथा चिन्हों का ज्ञान देना।

7) छात्रों को उच्च गणित में बीजगणित किस रूप में सहायक होता है, स्पष्ट करना।
8) छात्रों में आत्मविश्वास उत्पन्न करने के दृष्टिकोण से भी बीजगणित पढ़ाया जाना चाहिए, क्योंकि बीजगणित द्वारा समस्याओं का हल शीघ्रता व सरलता से प्राप्त किया जाता है।

अब हम एक उदाहरण द्वारा बीजगणित की शिक्षण-विधियों को स्पष्ट कर रहे हैं-

कल्पना करें कि हमें सूत्रों का शिक्षण करना है। विद्यालयों में यह देखा जाता है कि छात्र सूत्र रट लेते हैं एवं उसकी बारीकी न जानने के कारण पूरा-पूरा व सही प्रयोग नहीं कर पाते। इनकी सही ढंग से उपयोग करने व याद रख सकने के लिए शिक्षकों को चाहिए कि वे 'आगमन विधि' का प्रयोग स्वयं करें एवं विद्यार्थियों से भी कराएँ।

उदाहरण के लिए मान लिया कि शिक्षक कक्षा को "दो राशियों के अंतर का वर्ग" अर्थात $(a-b)^2$ पढ़ाना चाहता है। उसे इस क्रम में आगे बढ़ना चाहिए।

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \times\ a-b \\ \hline a^2 - ab \\ -ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

$= a^2 - 2ab + b^2$

शब्दों में इसे इस प्रकार कहा जा सकता हैं-

"दो राशियों के अंतर का वर्ग = पहली राशि का वर्ग – दोनों राशियों में गुणनफल का दुगुना + दूसरी राशि का वर्ग"

शिक्षक को चाहिए कि इसी प्रकार से विभिन्न उपयुक्त उदाहरणों द्वारा छात्रों से निरीक्षण कराने के पश्चात् नियमीकरण करावें। इस विधि में भूलने का डर नहीं होता, यदि होता भी है तो वे आगमन विधि से ज्ञात कर सकते हैं। सूत्र ज्ञात कराने के बाद निगमन विधि से सत्यता की जाँच करा देनी चाहिए एवं उन्हें भी सूत्र की पुष्टि हेतु अवसर देना चाहिए।

बीजगणित-शिक्षण से लाभ -

बीजगणित-शिक्षण से छात्रों को निम्नलिखित लाभ हो सकते हैं-

1) विज्ञान के अध्ययन में बीजगणित बहुत ही उपयोगी है।
2) समुच्चय सिद्धांत का अध्ययन तो बीजगणित के अध्ययन से ही संभव होता है।
3) बीजगणित के प्रयोग से गणना कार्य सरल हो जाता है।
4) गणित की अन्य शाखाओं के अध्ययन के लिए बीजगणित का अध्ययन होता हैं।
5) अंकगणित के प्रत्ययों, सिद्धांतों व क्रियाओं की स्पष्ट जानकारी बीजगणित के अभ्यास से होती है।
6) लेखाचित्रों एवं समीकरण से कठिन प्रश्नों को हल किया जाता है तथा बहुत सी सूचनाओं का पता चल पाता है।

बीजगणित अंकगणित का सामान्यीकृत रूप

बीजगणित का आधार अंकगणित ही है। जो विषय-सामग्री अंकगणित की है, वही बीजगणित की भी है। बीजगणित में विषय-सामग्री का विवेचन तथा अध्ययन का स्तर गहन हो जाता है तथा अधिक मानसिक चिंतन व तर्क की आवश्यकता होती है। संख्याओं के स्थान पर अक्षरों का प्रयोग किया जाता है। अंकगणित की चरों, मूलभूत प्रक्रियाएँ (+,-,×,÷) बीजगणित की प्रक्रियाएँ हैं। राशियाँ ऋणात्मक तथा धनात्मक दोनों ही होती हैं। अंकगणित की विषय-सामग्री ही सूचीकरण, नियंत्रीकरण या सामान्यीकरण का आधार बनाती है। इसमें बातें संक्षिप्त रूप में लिखकर जान ली जाती हैं। जितने भी सूत्र बीजगणित के हैं वे सभी अंकगणित से लिए गए हैं, क्योंकि सूत्र संक्षिप्त भाषा होती है, या इसे बीजगणित का वाक्य भी कह सकते हैं।

छात्रों को पढ़ाते समय यह अवश्य ही बता देना चाहिए कि बीजगणित व अंकगणित दोनों ही विषय सामग्री तथा प्रक्रियाएँ एक ही हैं। अंतर केवल यह है कि बीजगणित की भाषा अंकगणित की तुलना में अधिक संक्षिप्त है। यहाँ बीजगणित के पद या राशियाँ, अंकगणित की संख्याओं का ही प्रतिनिधित्व करते हैं। इस तरह इतनी बातचीत के पश्चात् यह कहा जा सकता है कि बीजगणित, अंकगणित का सामान्यीकृत रूप है।

सामान्यीकरण की प्रक्रिया के लिए उदाहरण

(क) त्रिभुज का क्षेत्रफल, उसके आधार एवं ऊँचाई के गुणनफल का आधा होता है। -(अंकगणित)

Δ का क्षेत्रफल = ½ b.h (बीजगणित)

यहाँ Δ = त्रिभुज, b = base (आधार), h = height (ऊँचाई)

अपनी प्रगति की जाँच करें

5. बीजगणित शिक्षण के उद्देश्यों पर प्रकाश डालें।

.....

.....

6. बीजगणित की इन विधियों पर टिप्पणियाँ लिखें- निगमन विधि और आगमन विधि।

.....

.....

3.5.3 रेखागणित-शिक्षण

गणित की एक शाखा रेखागणित भी है। इस शाखा में रेखाओं एवं रेखाओं से बनी आकृतियों के विषय में अध्ययन किया जाता है। इस शाखा के अध्ययन से बालकों में तर्क-शक्ति एवं विश्लेषण करने की क्षमता विकसित होती है। इसके अंदर वे साध्यों, अभ्यासों तथा रचना संबंधी ज्ञान अर्जित करते है। छात्रों को रेखागणित पढ़ाने के कुछ उद्देश्य हैं-

रेखागणित-शिक्षण के प्राप्य उद्देश्य

1. रेखागणित संबंधी तथ्यों का ज्ञान- कक्षा के स्तर के अनुसार रेखागणितीय ज्ञान (पाठ्य-क्रम) को विभाजित किया जाता है। छोटी कक्षा में, जहाँ से रेखागणित प्रारंभ की जाती है, आधारभूत बातें बताई जाती हैं, जैसे- बिंदु,

रेखा (सरल व वक्र), कोण इत्यादि की परिभाषाएँ, कोणों का ज्ञान, आकृतियों का बनाना जैसी बातें बताई जाती हैं।

2. रेखागणितीय उपकरणों का प्रयोग एवं उनका ज्ञान- रेखागणित में छात्र व्यावहारिक भाग का अध्ययन रेखागणितीय उपकरण द्वारा ही करते हैं। रचना कार्य वे यहीं सीखते हैं। आकृतियों का निर्माण, मापन इत्यादि करके वे मापन में कुशलता प्राप्त करते हैं तथा उपकरणों का सही प्रयोग करना सीखते हैं।

3. विश्लेषण, तर्क एवं निरीक्षण-शक्ति का विकास- रेखागणित ही वह शाखा है जहाँ तर्क को सर्वाधिक महत्व प्राप्त है, विश्लेषण का काफ़ी प्रयोग है एवं निरीक्षण आवश्यक है। आगमन विधि के माध्यम से छात्र यहाँ नियम की खोज कर साधारण प्रतिज्ञा करते हैं और प्राप्त किए गए नियमों या परिणामों की निगमन तर्क विधि के माध्यम से सत्यता आँकते हैं। विभिन्न संबंधों को सिद्ध करने या रचना विधि प्राप्त करने में विश्लेषण विधि का प्रयोग करते हैं और संश्लेषण विधि द्वारा रचना तथा उपपत्ति को प्रदर्शित या प्रस्तुत करते हैं। रचना कार्य में निरीक्षण व अवलोकन शक्ति को तीक्ष्ण बनाने का अवसर प्राप्त होता है।

4) उच्च शिक्षणों में सहायक- छात्रों को रेखागणित का शिक्षण करते समय विज्ञान, तकनीकी, उद्योग एवं इन्जीनियरिंग में उसके उपयोग एवं महत्व के विषय में भी बताया जाए ।

5) दैनिक जीवन में उपयोगिता- दैनिक जीवन में जहाँ-जहाँ रेखागणित संबंधी ज्ञान की आवश्यकता होती है, वहाँ इसके उपयोग कर सकने की योग्यता में वृद्धि करनी चाहिए। सौन्दर्यात्मक तुष्टि हेतु भी डिज़ाइनों के माध्यम से इसकी उपयोगिता बनानी चाहिए।

रेखागणित शिक्षण की विधियाँ

रेखागणित-शिक्षण की दो अवस्थाएँ होती हैं- पहली अवस्था प्रायोगिक अवस्था तथा दूसरी अवस्था सैद्धांतिक अवस्था कहलाती है।

प्रायोगिक अवस्था- इस अवस्था में छात्र प्रयोग संबंधी कार्य करते हैं। विभिन्न आकृतियाँ (त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त....) बनाते हैं, पटरी, चाँद, परकार इत्यादि का प्रयोग करते हैं, रचना करते हैं एवं संबंध स्थापित करते हैं।

सैद्धांतिक अवस्था- बहुधा देखने में आता है कि विद्यालयों में साध्यों को सिद्ध करने के लिए संश्लेषण विधि का प्रयोग होता है, जबकि वहाँ विश्लेषण विधि को प्राथमिकता दी जानी चाहिए।

रेखागणित-शिक्षण में प्रयुक्त होने वाली शिक्षण-विधियों को हम दो भागों में बाँट सकते हैं। वे इस प्रकार हैं-

अ) प्रायोगिक अवस्था पर प्रयुक्त की जाने वाली शिक्षण-विधियाँ।

ब) सैद्धांतिक अवस्था पर प्रयुक्त की जाने वाली शिक्षण-विधियाँ।

अ) प्रायोगिक अवस्था पर प्रयुक्त की जाने वाली शिक्षण-विधियाँ

प्रायोगिक अवस्था पर निम्नलिखित शिक्षण-विधियों का प्रयोग किया जाता है-

1. आगमन विधि- इस विधि में शिक्षक छात्रों के सम्मुख विभिन्न उदाहरण को प्रस्तुत करके उन्हें मापन एवं रचना का अवसर देता है। छात्र रचना एवं मापन के आधार पर उनका अच्छी तरह निरीक्षण करके नियम ज्ञात करते हैं।

2. निगमन विधि- छात्र शिक्षक की सहायता एवं मार्गदर्शन में आगमन विधि द्वारा प्राप्त नियमों व सिद्धांतों को अन्य उदाहरणों की मदद से उनकी सत्यता को आँकते हैं। शिक्षक को इस कार्य हेतु अवसर प्रदान करना चाहिए।

3. प्रदर्शन विधि- रेखागणित सीखने में प्रदर्शन कार्य का भी महत्वपूर्ण हाथ है। उपकरणों का प्रयोग व मापन कार्य सभी को प्रारंभ में देखना पड़ता है, फिर उसके बाद ही छात्र स्वयं करके सीखते हैं। जैसे- परकार पकड़ना, पेन्सिल लगाना, बिंदु पर नोंक रखना, चाँद को रखना, कोण पढ़ना इत्यादि सभी कार्यों को सिखाने में प्रदर्शन आवश्यक हैं।

ब) सैद्धांतिक अवस्था पर प्रयुक्त की जाने वाली शिक्षण-विधियाँ

सैद्धांतिक अवस्था, जो आयु के साथ बढ़ती है, उसके लिए जो विधियाँ प्रयुक्त की जाती हैं, वे निम्नलिखित हैं-

1. विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि।
2. आगमन विधि।
3. प्रदर्शन विधि।

उपर्युक्त विधियों को प्रयोग में लाते समय सामान्य रूप से निम्नलिखित क्रम प्रयोग में लाया जाता है-

1. समस्या से परिचित होना- समस्या उत्पन्न होने पर छात्रों को समस्या से परिचय प्राप्त करना होता है अर्थात् यह जानने का प्रयत्न किया जाता है कि समस्या में क्या दिया हुआ हैं और क्या ज्ञात करना है।

2. आँकड़ों में संबंध- समस्या का बोध हो जाने के पश्चात् आँकड़ों में संबंध स्थापित किया जाता है एवं यह भी ज्ञात किया जाता है कि अज्ञात राशियों में क्या संबंध होगा?

3. हल खोजना- संबंध स्थापित हो जाने के पश्चात् हल या सिद्ध कराए जाने वाली को सिद्ध करने का प्रयास किया जाता है। यह कार्य विश्लेषण विधि से किया जाना चाहिए, न कि संश्लेषण-विधि से।

4. संश्लेषण- विश्लेषण विधि से हल खोजने के पश्चात् उसे संश्लेषण विधि से प्रस्तुत करना चाहिए।

5. पुनरावृति एवं अर्जित ज्ञान का उपयोग- एक बार समस्या हल होने के पश्चात् अभ्यासार्थ कुछ, वैसे ही प्रश्न दिये जाने चाहिए जिनसे उनकी ज्ञान-ग्राहयता के विषय में पता लग जाए एवं जो ज्ञान उन्होंने प्राप्त किया है, उसका उपयोग कर सकें।

अपनी प्रगति की जाँच करें

7. रेखागणित शिक्षण के उद्देश्यों पर प्रकाश डालें।

.....

.....

8. रेखागणित-शिक्षण की प्रभावी विधियों को स्पष्ट करें।

.....

.....

3.5.4 त्रिकोणमिति शिक्षण

त्रिकोणमिति विषय यद्यपि हमारे विद्यालयों में काफ़ी देर से प्रचलित हुआ है, परंतु इसके प्रादुर्भाव का इतिहास काफ़ी पुराना हैं। आज से 2000 वर्ष से भी अधिक पूर्व समय में इसका प्रचलन था, क्योंकि खगोल

विद्या में नक्षत्रों की स्थिति का ज्ञान इसी के सहारे किया जाता था। आज जहाँ इसे आधुनिक गणित के अध्ययन के लिए आवश्यक मानकर विद्यालय पाठ्यक्रम में उपयुक्त स्थान दिया जाता है वहीं इसकी अपनी पुरानी जैसी उपयोगिता कम नहीं हुई है। यह एक ओर जहाँ उच्च आधुनिक गणित को अच्छी तरह सीखने-समझने में मदद करती है वहीं दूसरी ओर नक्षत्र विज्ञान, भू-विज्ञान तथा जमीन और समुद्र पर स्थिति, दूरी एवं स्थानों आदि के निश्चित मापन में इसका अच्छी तरह उपयोग किया जाता है। आज गणित का जिस रूप में विज्ञान तथा तकनीकी क्षेत्रों में बड़े पैमाने पर उपयोग किया जाता है, उसे सुगम एवं सहज बनाने में त्रिकोणमिति पर आधारित गणित के तथ्यों एवं सिद्धांतों का काफ़ी प्रमुख योगदान है। अर्थ की दृष्टि से संक्षिप्त शब्दावली में त्रिकोणमिति जैसा कि इसके नाम से विदित होता है त्रिभुज के तीन कोणों से घिरे हुए क्षेत्र की माप एवं उससे संबंधित विविध संबंधो तथा संक्रियाओं के माध्यम से दूरी एवं स्थानों के मापन को सहज एवं सुगम बनाने वाली गणित की वह शाखा है जिससे सर्वेक्षण, मापन तथा दिशा बोध से जुड़ी हुई इंजीनियरिंग, ज्योतिष तथा खगोल विद्या की अनगिनित कठिन समस्याएँ आसानी से हल हो जाती हैं।

विविध त्रिकोणमितीय मूल संबंधों से परिचित कराना

त्रिकोणमिति शिक्षण की प्रारंभिक अवस्था में सरल त्रिकोणमितीय संबंधों का ज्ञान कराया जाता है। मूल रूप से यहाँ इस प्रश्न के 6 संबंधों का ज्ञान कराना होता है, जो किसी कोण के साइन, कोसाइन, टेनजेन्ट, कोटेनजेन्ट, सीकैंट तथा कोसीकैंट कहकर पुकारे जाते है।

कोण के रूप में यहाँ न्यूनकोण को लेकर आगे बढ़ना ठीक रहता है तथा त्रिकोणमितीय संबंधो को किसी समकोण त्रिभुज (जिसके एक कोण के रूप में न्यूनकोण को रखा जाता है) की भुजाओं के अनुपात में व्यक्त करके परिभाषित किया जाता है।

सबसे पहले कोण के साइन, कोसाइन तथा टेनजेन्ट संबंधों को दी हुई समकोणिक त्रिभुज की आकृति के माध्यम से निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है-

$\sin\theta$= लंब/कर्ण; $\cos\theta$= आधार/कर्ण; $\tan\theta$= लंब/आधार

किसी भी कोण के कोसीकैंट, सीकैंट, कोटेनजेन्ट उसके साइन, कोसाइन तथा टेनजेन्ट के विपरीत होते है।

3.5.5 सांख्यिकी शिक्षण

सांख्यिकी या आंकड़ा विज्ञान नामक विषय अपने मूल रूप में संख्यात्मक तथ्यों या आँकड़ों के सुव्यवस्थित अध्ययन से अपना संबंध रखता है। संख्यात्मक तथ्यों तथा आँकड़ों का, जिन्हें प्रदत्त भी कहा जाता है, हमारे जीवन में काफ़ी महत्व है। ज्ञान एवं सूचना का विशाल भंडार इसके गर्भ में छुपा रहता है। अगर हमें अपने काम-काज की दुनिया से संबंधित विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ तथा अपने विभिन्न प्रश्नों के उत्तर चाहिए तो उनके लिए आँकड़ों की दुनिया में जाना ही होगा और इन आँकड़ों तथा प्रदत्त सूचना को संग्रहीत करने, उनका समुचित विश्लेषण करके उनसे वांछित अर्थ निकालने के कार्य में भी दक्षता हासिल करनी होगी।

सांख्यिकी - संख्यात्मक तथ्य या प्रदत्तों की अवधारणा

शुरुआत दिन-प्रतिदिन की जिंदगी से संबंधित ऐसे उपयोगी तथा रुचिकर उदाहरणों के माध्यम से होनी चाहिए जिनकी सहायता से विद्यार्थियों को यह आभास हो कि सांख्यिकी विषय सूचनाओं, संख्यात्मक तथ्यों तथा

प्रदत्तों के संग्रह, व्यवस्थापन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा उनकी उचित व्याख्या तथा प्रयोग आज के समय में कितना महत्व रखता है।

सांख्यिकी का अर्थ

सामान्यतया 'सांख्यिकी' शब्द निम्न तीन अर्थों में प्रयुक्त होता है-

1) पहले अर्थ में यह शब्द आंकिक तथ्यों के लिए प्रयुक्त होता है।

2) दूसरे अर्थ में सांख्यिकी शब्द आंकिक या सांख्यिकी विधियों से अपना संबंध रखता है।

3) अपने तीसरे अर्थ में सांख्यिकी शब्द आंकिक तथ्यों के सारांशित अंकों जैसे प्रतिशत, औसत या मध्यमान, मध्यांक, बहुलांक, प्रामाणिक-विचलन मान आदि के लिए प्रयुक्त होता है।

प्रदत्तों को संगठित एवं प्रस्तुतीकरण करने की विधियों का शिक्षण

प्रदत्तों से क्या अभिप्राय है यह जानने के पश्चात् विद्यार्थियों को जो सूचनाएँ तथा प्रदत्त आदि विभिन्न स्रोतों, जैसे परीक्षा रिकॉर्ड, सर्वेक्षण इत्यादि से प्राप्त होते है उनको भलीभांति संग्रहित करके उनका व्यवस्थापन करने तथा फिर उनका वांछित रूप में प्रस्तुतीकरण करने से संबंधित विधियों का समुचित ज्ञान कराया जाना चाहिए।

सामान्यतया निम्न चार विधियाँ प्रदत्तों को व्यवस्थित करने और उनको सही रूप में प्रस्तुत करने के काम में लाई जाती हैं-

अ) सांख्यिकीय तालिकाओं के रूप में प्रस्तुति।

ब) आवृत्ति वितरण के रूप में प्रस्तुति।

स) अवर्गीकृत प्रदत्तों का रेखाचित्रीय प्रस्तुति।

द) आवृति वितरण का रेखाचित्रीय प्रस्तुति।

अपनी प्रगति की जाँच करें

9. सांख्यिकी शिक्षण के लिए उपयुक्त शिक्षण विधियों को स्पष्ट करें।

.....

.....

3.6.0 सारांश

शिक्षण में इकाई योजना व पाठ योजना विषय-वस्तु को क्रमबद्ध तथा शिक्षण के लिए उचित दिशा-निर्देश प्रदान करता है। इसके माध्यम से शिक्षण को सुचारू रूप से तथा प्रभावी तरीके से किया जाता है। इकाई योजना के द्वारा हम विभिन्न पाठों के लिए प्रारूप तैयार करते है और फिर पाठ योजना की सहायता से हम एक निश्चित पद्धति और निर्देशन युक्तियों का चयन कर शिक्षण को प्रभावशाली बनाते है। गणित के विभिन्न विषयों के लिए अलग-अलग निर्देशन युक्तियों के माध्यम से हम शिक्षण को प्रभावी तथा रोचक बनाते है, परंतु उपयुक्त निर्देशन युक्तियों का चयन होना आवश्यक हो जाता है, ताकि गणित शिक्षण को रोचक बनाया जा सकें। अंकगणित, बीजगणित और रेखागणित के लिए हम अलग-अलग निर्देशन युक्तियों का उपयोग करते है।

3.7.0 अपनी प्रगति के लिए अपेक्षित उत्तर

1. 3.3.6 इकाई परीक्षण का प्रारूप
2. 3.4.5 पाठ योजना का निर्माण
3. 3.5.1 अंकगणित-शिक्षण
4. 3.5.1 अंकगणित-शिक्षण
5. 3.5.2 बीजगणित-शिक्षण
6. 3.5.2 बीजगणित-शिक्षण
7. 3.5.3 रेखागणित-शिक्षण
8. 3.5.3 रेखागणित-शिक्षण
9. 3.5.5 सांख्यिकी शिक्षण

3.8.0 संदर्भ पुस्तकें

- सिंह, योगेश कुमार (2010). गणित शिक्षण: आधुनिक पद्धतियाँ. नई दिल्ली: ए.पी.एच. पब्लिशिंग हाउस.
- मंगल, एस.के. (2005). गणित शिक्षण. नई दिल्ली: आर्य बुक डिपो
- नेगी, जे.एस. (2007). गणित शिक्षण. आगरा: विनोद पुस्तक मंदिर
- कुल्श्रेस्ठ, ए.के. (2007). गणित शिक्षण. मेरठ: आर. लाल बुक डिपो
- The Teaching of Mathematics b I.W.A. Young.
- The Teaching of Mathematics by K.S. Sidu.
- AMT-01. Teaching Mathematics. IGNOU Series.
- Boyer, C. B. (1968). History of Mathematics. New York: John Wiley.
- Hanna, G. (1995). Challenges to theImportance of proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-49.
- Devlin K. (2011). Introduction to Mathematical thinking. Ernest P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education.

इकाई – 4
हम आसानी से गणित कैसे सिखाए?

इकाई की संरचना

4.1.0 उद्देश्य
4.2.0 प्रस्तावना
4.3.0 सीखने की संस्कृति
4.3.1 कक्षा में सक्रिय वातावरण का निर्माण
4.3.2 कक्षा में विचारों को साझा करना तथा खोज करना
4.3.3 नवपरिवर्तनशील प्रक्रिया को बढ़ावा देना
4.4.0 गणित की कक्षा में संचार की भूमिका
अपनी प्रगति की जाँच करें
4.4.1 कक्षा में गणितज्ञों का समूह बनाना: गणितीय क्लब
अपनी प्रगति की जाँच करें
4.5.0 गणितीय चिंतन में श्रव्य-दृश्य सामग्री
अपनी प्रगति की जाँच करें
4.5.1 गणित से जुड़ी कहानियां
4.5.2 गणित में तकनीकी का उपयोग
अपनी प्रगति की जाँच करें
4.6.0 गणित की प्रकृति और गणित सीखने के विषय में शिक्षक के विश्वास और ज्ञान का गणित शिक्षण में महत्व
4.7.0 विद्यालयी गणित की उत्कृष्टता में शिक्षक की भूमिका
अपनी प्रगति की जाँच करें
4.8.0 सारांश
4.9.0 अपनी प्रगति की जाँच के लिए अपेक्षित उत्तर
4.10.0 संदर्भ पुस्तकें

4.1.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के उपरांत आप

- गणित सीखने की संस्कृति को समझने में सक्षम हो जाएँगे।
- गणित की कक्षा में संचार की भूमिका को स्पष्ट कर सकेंगे।
- गणितीय क्लब के महत्व को समझेंगे।
- गणित से जुड़ी गतिविधियों और कहानियों के शिक्षण में महत्व को समझ पाएँगे।

- गणित की प्रकृति और गणित सीखने के विषय में शिक्षक के विश्वास और ज्ञान का गणित शिक्षण में महत्व को जान पाएँगे।
- विद्यालयी गणित की उत्कृष्टता में शिक्षक की भूमिका को स्पष्ट कर पाएँगे।

4.2.0 प्रस्तावना

आज के युग में, हमें संख्यात्मक सोच की बेहद जरूरत है। परंतु स्कूल की गणित में आम जिंदगी की समस्याओं का बहुत कम ही जिक्र होता है। गणित की कक्षाओं में बच्चों को फालतू और उबाऊ समस्याओं से जूझना पड़ता है। बच्चे लगातार इन किताबी समस्याओं में ही उलझे रहते है। गणित का उपयोग दुनिया की बड़ी समस्याओं को सुलझाने के लिए किस प्रकार किया जाए इसका उन्हें कोई इल्म नहीं होता है। आज जरूरत गणित शिक्षण को रोचक और प्रभावी बनाने की है, ताकि विद्यार्थियों में गणित के प्रति रोचकता उत्पन्न हो सके और वह गणितीय ज्ञान को वास्तविक जीवन की समस्याओं के साथ जोड़ सकें।

4.3.0 सीखने की संस्कृति- संस्कृति और सभ्यता प्रत्यक्ष रूप से शिक्षा और विकास से जुड़ा हुआ है। बहुत सारी भाषाओं में शिक्षा का अर्थ उगाना (cultivation), पौधे का बढ़ना से लगाया जाता है। संस्कृति और सभ्यता प्रत्यक्षत: हमारा ध्यान सीखने और सिखाने की अप्रत्यक्ष प्रक्रिया की ओर खिचती है। गणित शिक्षण की कक्षा में, किसी विषय-वस्तु का अर्थ निकालने की प्रक्रिया बहुत ही अंतर्दृष्टि और अस्पष्ट है। उदाहरण के लिए, क्यों किसी प्रमेय को अधिक प्रभावशाली माना जाता है? क्यों गणितीय समस्या के समाधान के एक विधि को दूसरे से अधिक उपयुक्त कहा जाता है? गणित कक्षा की संस्कृति सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। यदि कक्षा की संस्कृति सीखने की है तो विद्यार्थियों में अधिगम की दर अधिक होती है। परंतु आजकल सामान्य संस्कृति और कक्षा की संस्कृति में थोड़ा अंतर देखने को मिलता है। एक संस्कृति वह है जो सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में पूर्व निर्धारित होती है और दूसरी वह कक्षा संस्कृति जिसकी रचना की जाती है। इन दोनों ही संस्कृतियों में फर्क देखने को मिलता है। तो सवाल यह उठता है कि कक्षा की संस्कृति को एक वृहत पैमाने पर कैसे विस्तृत की जाए? जिस संस्कृति की हम कक्षा में रचना करते है वह कैसे मूल संस्कृति से कैसे संबंधित हो सकता है? आज जरूरत इस बात की है कि कक्षा की संस्कृति सीखने की होनी जरुरी है और विभिन्न संस्कृतियों के सीखने की प्रक्रिया से गणितीय कक्षा को जोड़ा जाए।

सीखने की संस्कृति को प्रभावी बनाने के लिए किए जाने वाले उपाय

सीखने की संस्कृति को प्रभावी बनाने के लिए निम्न उपाय किए जा सकते हैं-

1. कक्षा में सक्रिय वातावरण का निर्माण,
2. कक्षा में विचारों को साझा करना तथा खोज करना,
3. विविधतापूर्ण और नवपरिवर्तनशील प्रक्रिया/कार्यविधि को बढ़ावा देना,
4. गणितीय समस्या समाधान के लिए एक से अधिक तरीकों का इस्तेमाल,
5. अनुमान लगाना

4.3.1 कक्षा में सक्रिय वातावरण का निर्माण- गणित की कक्षा में सक्रिय वातावरण की आवश्यकता होती है, ताकि विद्यार्थियों को गणित की कक्षा नीरस नहीं लगे और वे शिक्षण-प्रक्रिया में सहभागी बन सकें। इसके लिए शिक्षक को विभिन्न शिक्षण पद्धतियों तथा युक्तियों का प्रयोग करना चाहिए।

4.3.2 कक्षा में विचारों को साझा करना तथा खोज करना- गणित की कक्षा कभी भी एक दिशात्मक नहीं होनी चाहिए। शिक्षक को चाहिए कि वह कक्षा में अपने विचारों को विद्यार्थियों से साझा करें तथा विद्यार्थियों को भी पर्याप्त अवसर दे ताकि कक्षा की संस्कृति सीखने की बनें। कक्षा में नये विचारों को साझा करने से विद्यार्थियों के मन में उत्सुकता बढ़ेगी और वे सीखने के प्रति उत्साहित होंगे। इससे खोज की प्रवृत्ति भी बढ़ेगी।

4.3.3 विविधतापूर्ण और नवपरिवर्तनशील प्रक्रिया/कार्यविधि को बढ़ावा देना- शिक्षक को विविधापूर्ण होना चाहिए। उसे विषय के अतिरिक्त दूसरे विषयों की भी जानकारी होनी चाहिए ताकि वह अपने ज्ञान को ज्ञान के दूसरे क्षेत्रों से जोड़ सके और छात्रों को ज्ञान के विभिन्न आयामों से अवगत करा सके। गणित सिखाने के लिए कक्षा की संस्कृति का ध्यान रखना जरुरी है। एक कक्षा में छात्रों के बीच वैयक्तिक विभिन्नता तो पहले से मौजूद होती है और एक शिक्षक के रूप में आपका ज्ञान विविधतापूर्ण होने से छात्रों के बीच एक सकारात्मक संदेश जाता है, जिससे कक्षा में सीखने की संस्कृति का विकास होता है। शिक्षक को चाहिए की वह नवपरिवर्तनशील प्रक्रिया को कक्षा में बढ़ावा दे। नई-नई शिक्षण पद्धतियों का उपयोग कर गणित कक्षा में सीखने-सिखाने की संस्कृति को मजबूत आधार प्रदान करें।

गणितीय समस्या समाधान के लिए एक से अधिक तरीकों का इस्तेमाल- गणित विषय के सभी प्रसंग एक दूसरे से जूड़े होते है, अत: गणित में किसी प्रसंग से जुड़ी समस्या का समाधान दूसरे प्रसंग की सहायता से भी की जा सकती है। गणित में प्रमाण के भी कई तरीके है अत: गणितीय कथन या समस्या को एक से अधिक तरीके से हल किया जा सकता है। एक से अधिक तरीकें से समस्या समाधान कर छात्रों को सिखाने से एक शिक्षक के रूप में, बहुत सारी समस्याओं का पता भी चल जाता है जैसे छात्रों को दूसरे प्रसंग की कितनी समझ है और साथ ही साथ छात्रों की समझ भी विकसित होती है तथा उनके चिंतन के स्तर में बढ़ोत्तरी होती है।

अनुमान लगाना: अनुमान लगाना गणित में एक प्रक्रिया के रूप में स्वीकार किया जाता है। इसमें विभिन्न गणितीय परिस्थितियों को ध्यान में रखकर एक अनुमान लगाकर निष्कर्ष पर पहुँचा जाता है। इसमे मानसिक प्रक्रिया का ज्यादा योगदान होता है।

4.4.0 गणित की कक्षा में संचार की भूमिका-

गणित की कक्षा में संचार की भूमिका को नकारा नही जा सकता। शिक्षक के व्यक्तित्व और संचार कौशल का शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया पर प्रभाव देखने को मिलता है। शिक्षक की भाषा सुस्पष्ट होनी चाहिए तथा उसे कक्षा में संप्रेषण कौशल का ज्ञान होना जरूरी है, ताकि विद्यार्थियों को प्रभावी तरीके से शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया में शामिल किया जा सके।

गणित से संबंधित बातचीत

आज के युग में, हमें संख्यात्मक सोच की बेहद जरूरत है। परंतु स्कूल की गणित में आम जिंदगी की समस्याओं का बहुत कम ही जिक्र होता है। गणित की कक्षाओं में बच्चों को फालतू और उबाऊ समस्याओं से

जूझना पड़ता है। बच्चे लगातार इन किताबी समस्याओं में ही उलझे रहते है। गणित का उपयोग दुनिया की बड़ी समस्याओं को सुलझाने के लिए किस प्रकार किया जाए इसका उन्हें कोई इल्म नहीं होता है।

गणित केवल सरल जोड़-घटाने, गुणा-भाग तक ही सीमित रह गयी है और वास्तविक जीवन में उसके व्यापक उपयोग के पहलू कमजोर पड़ गए हैं। इसके परिणामस्वरूप बहुत से होशियार छात्र अब गणित से अपना पल्ला झाड़ रहे है। हम कहीं भूल गए हैं कि गणित आम जिंदगी के व्यवसायों से शुरू हुई थी और उसके विकास में दर्जी, बढई और राज-मिस्त्रियों का बहुत बड़ा योगदान था। आज भी गणित की शब्दावली हमें उसके अतीत की व्यावहारिक जड़ों की याद दिलाती है। 'स्ट्रेट-लाइन' यानी सीधी-रेखा शब्द का उद्गम बहुत ही रोचक है। यह शब्द आता है-'स्ट्रेच्जड' का मतलब हैं खींचना और 'लिनन' का मतलब है धागा। कोई भी किसान आलुओं को सीधी रेखा में बोने के लिए एक धागे को खींच कर उस रेखा में आलू को बोएगा। राज-मिस्त्री भी ईंटो की दीवार सीधी बनाने के लिए एक डोर को तानते हैं। धीरे-धीरे 'स्ट्रेच्जड-लिनन' शब्द 'स्ट्रेट –लाइन' यानी सीधी-रेखा में बदल गया। अंग्रेजी में 1 से 10 तक के 'डिजिट' अथवा 'डिजिटल' का अर्थ लैटिन में हाथ की दस उंगलियां होता है।

गणित को उसके यांत्रिक जाल से मुक्त कर उसे अधिक प्रभावशाली बनाने का अब वक्त आ चुका है। कंप्यूटर एक बेहद सशक्त औजार है, जिसके द्वारा हम जटिल गणनाएं कर समस्याएं सुलझा सकते हैं। कैल्क्यूलस की कक्षा वास्तविक जीवन की समस्याओं को सुलझाने के लिए होनी चाहिए- हम कैसे मजबूत पुल अथवा कम ऊर्जा वाले घर बनाएँ। गणित का शिक्षण अगर आम जीवन की समस्याओं को हल करने का माध्यम बनेगा तो छात्र बेहद रूचि से पढेंगे।

इसके लिए बच्चों को अनेकों पहेलियाँ हल कराना चाहिए- यानि गणित की पढ़ाई सबसे मजेदार तरीके से शुरू करना चाहिए। इसके लिए उन्हें वास्तविक चीजों के साथ प्रयोग करना चाहिए।

गणित को अक्सर एक जटिल और उबाऊ विषय जैसे पेश किया जाता है। ऐसा मानना है कि अमूर्त चिंतन के कारण गणित का विषय केवल कुछ ही लोगों को अच्छा लगेगा। भारतीय गणितज्ञ भास्कराचार्य द्वारा लिखित 'लीलावती' पुस्तक इस धारणा को ध्वस्त करती है और गणित को आम जीवन से जुड़ी समस्याओं के जरिए रोचक कविताओं के रूप में पेश करती है।

एक उदाहरण से यह ज्यादा स्पष्ट होगा: कुल मधुमक्खियों में से आधी का वर्गमूल मालती के पेड़ पर उड़ गया। फिर कुल मधुमक्खियों का 8/9 समूह भी उड़ गया। बेचारी एक मधुमक्खी कमल के फूल के अंदर तब फंसी जब उसका प्रेमी उसे खोजता हुआ आया। अब बहन, तुम ही बताओं कि कुल कितनी मधुमक्खियां थी?

अपनी प्रगति की जाँच करें

1. गणित सीखने की संस्कृति का महत्व बताएँ।

.....

.....

2. सीखने की संस्कृति को प्रभावी बनाने के लिए किए जाने वाले गतिविधियों का वर्णन करें।

.....

.....

4.4.1 कक्षा में गणितज्ञों का समूह बनाना: गणितीय क्लब

गणित क्लब और उससे संबंधित मनोरंजक क्रियाएँ गणित में रूचि पैदा करने वाले साधनों में से एक है। गणित क्लब का अस्तित्व अभी तक हमारी कल्पना तक ही सीमित है, इसको यथार्थक रूप में स्कूल में स्थापित नहीं किया जा सका। परंतु इसको स्थापित करने, संभव और सफल बनाने की ओर अध्यापक का ध्यान खींचना जरूरी है। अन्य **मजमूनों** और मनोरंजक क्रियाओं के साथ संबंधित क्लबें या सभाएं स्कूलों में स्थापित हैं जैसे संगीत क्लब, नाटक क्लब, साहित्य सभा, साइंस क्लब आदि और इनसे विद्यार्थियों को विशेष लाभ प्राप्त हो रहे है। इसी धारणा के अधीन गणित क्लब की स्थापना से भी विद्यार्थियों को अनेक लाभ प्राप्त होने की संभावना है। गणित क्लब का संगठन एक प्रकार से समय की माँग है, जबकि हमने अनुभव कर लिया है कि ऐसी क्लब की क्रियाओं से विद्यार्थी अनेक गुण ग्रहण करते हैं, जो आम क्लास रूम की स्थिति में संभव नहीं होते। गणित क्लब की स्थापना हमारे स्कूलों में बिल्कुल एक नए तजुरबे के समान है।

गणित क्लब का संगठन

इसको संगठित करने की विशेष ज़िम्मेदारी गणित के अध्यापकों पर ही आएगी। वह ही इस पक्ष में अगुवाई करेंगे। इन अध्यापकों से अतिरिक्त अन्य विज्ञानों **मजमूनों** के अध्यापक भी यदि चाहें तो इस क्लब के सदस्य बन सकते है। गणित के सारे विद्यार्थियों को तो इसका सदस्य बनना ही चाहिए। स्कूल का मुख्य अध्यापक इस क्लब का भुविक होगा। क्लब को नियमित रूप से चलाने के लिए विद्यार्थियों में से कुछ पद अधिकारी जैसे स्कत्र, उप स्कत्र, खजांची आदि का चुनाव कर लेना चाहिए। एक कार्यकारिणी भी चुनी जा सकती है। यदि स्कूल में गणित के विद्यार्थियों की संख्या बहुत ज्यादा हो तो यह जरूरी हो जाएगा कि गणित में विशेष रूचि रखने वालों को ही इसका सदस्य बनाया जाए। यदि सदस्यों की संख्या बहुत ज्यादा हो जाए तो भी क्लब को सुयोग्यता से नहीं चलाया जा सकता। यदि सदस्य थोड़े और रूचि रखने वाले होंगे तो इस सभा से उनको संतुष्टिदायक लाभ प्राप्त होगा।

गणित क्लब के लक्ष्य

इस क्लब के लक्ष्यों को इस प्रकार सूची-बध्द किया जाता है:

1) प्रथम लक्ष्य तो यही होगा कि इसके द्वारा विद्यार्थियों में गणित के प्रति रूचि पैदा करनी है और विकसित करनी है। इसकी सारी क्रियाएँ और सारे प्रोग्राम ऐसे ढंग के साथ आयोजित किए जाएँगे कि गणित का रुचिकर पक्ष प्रदर्शित हो।
2) यह क्लब अध्यापकों और विद्यार्थियों को एक ऐसा फोरम प्रदान करेगी जहाँ कि वह अधिक अच्छे रूप में गणित के विषयों और संबंधित समस्याओं के बारे में विचार विमर्श कर सके। गणित शिक्षा में रुचिकर क्रियाओं का प्रवेश करने के लिए भी यह एक विशेष संभावना मात्र है।
3) इसके द्वारा विद्यार्थियों और अध्यापकों को गणित संबंधी मौलिक आत्म-प्रकटाव का अवसर मिलेगा, जहाँ वह कोई पत्र पढ़ सकेंगे या किसी वाद विवाद का आयोजन कर सकेंगे।
4) श्रेणी कमरे तक सीमित अध्ययन से आगे विशाल और विस्तृत अध्ययन के अवसर पैदा होंगे, क्योंकि इसमें गणित के ऐसे पक्ष पर बल होगा जो श्रेणी कमरे की रस्मी पढ़ाई से कुछ अनोखा और विस्तृत होगा।

5) यह क्लब गणित संबंधी प्रदर्शनियों और मुकाबलों का आयोजन कर सकती है।
6) इसी माध्यम के द्वारा विद्यार्थियों को गणित के और बाहरी प्रसिद्ध तथा विद्वान अध्यापकों के संपर्क का मौका दिया जा सकता है और उनके बहुमूल्य विचार सुनने का अवसर भी दिया जा सकता है।
7) यह अध्यापकों और विद्यार्थियों के लिए अत्र-स्कूल मिलनियो का माध्यम बन सकती है। इस प्रकार उनके संपर्क एक ही स्कूल की सीमाओं तक सीमित नहीं रहते, बल्कि उनको अपने संगठन का दायरा विशाल बनाने में सहायता मिलती है।
8) यह सभा गाणितिक महत्व वाले स्थानों की सैर का प्रबंध भी कर सकती है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

3. गणितीय क्लब के महत्व को बताएँ।

.....

.....

4.5.0 गणितीय चिंतन में श्रव्य-दृश्य सामग्री

गणित शिक्षण में काम आने वाली वस्तुएँ और मॉडल

गणित शिक्षण में निम्नलिखित सामग्री प्रस्तुत की जाती है-

अ) अंकगणित से संबंधी सहायक सामग्री

अंकगणित से संबंधित सहायक सामग्री निम्नलिखित हैं-

1) गोलियाँ, गेंदे एवं सिक्के।
2) भिन्न की धारणा हेतु गत्ते के मॉडल।
3) नापने के लिए फीता, फूटा, मीटर आदि।
4) तौलने के लिए विभिन्न प्रकार के बाँट एवं तुला।
5) घड़ी एवं कलैंडर।
6) दशमलव सरल व्यास, भिन्न आदि के स्पष्ट करने हेतु चार्ट।
7) एबेकस।

ब) बीजगणित शिक्षण से संबंधी सहायक सामग्री

बीजगणित से संबंधी सहायक सामग्री निम्नलिखित है-

1) ऋणात्मक संख्यायें एवं उनके कार्य संबंधी चार्ट।
2) समीकरणों की व्याख्या हेतु पैमाने।
3) बीजगणित सूत्रों के चार्ट।
4) सूत्रों पर आधारित मॉडल।

स) रेखा गणित से संबंधी सहायक सामग्री

रेखागणित से संबंधित सहायक सामग्री निम्नलिखित है-

1) ज्यामितीय उपकरण, स्केल, चांदा, पटरी, परकार, गुनियाँ, सेक्सटेंट, तथा समतल मापक आदि।

2) ज्यामितीय प्रमेयों पर आधारित चार्ट, मॉडल, लघुगणक सारणी।
3) शंकु, पिरामिड एवं गोला, त्रिपाशर्व आदि के मॉडल।
4) ग्राफ बोर्ड एवं ग्राफ चार्ट।

1) उपर्युक्त सामग्री का प्रयोग कर निर्मित कुछ ठोस ज्यामिति, बीजगणित, एवं समतल ज्यामिति के मॉडल की सूची दी गयी हैं।
1) त्रिभुज का मॉडल, जिसमें छात्र दो रेखाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा को नापकर तीसरी को आधा के समान सिद्ध करते है।
2) वृतों की स्पर्श रेखाओं को प्रदर्शित करने वाले मॉडल।
3) पाइथागोरस प्रमेय का मॉडल जिसमें प्रत्यक्ष वर्ग प्रदर्शित किये हो तथा कर्ण पर बने वर्गों का योग दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के योग के समान हों।
4) आयातों तथा समानांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल संबंधी मॉडल जिसमें दोनों के आधार एवं ऊँचाई समान हों तथा जिसमें दोनों त्रिभुजों को परस्पर बदलकर समान क्षेत्रफल को प्रदर्शित किया जा सके।
5) एक लकड़ी का त्रिभुज लेकर उसमें तीनों भुजाओं पर इस प्रकार मोड़ते हैं कि मोड़ने पर तीनों शीर्ष बिंदु को मोड़ने पर एक ही बिंदु पर मिलते है। एक ही बिंदु पर तीनों कोणों का योग 180^0 हो जाएगा।

गणित-शिक्षण में सहायक सामग्री का महत्व

किसी भी विषय के शिक्षण को सफल बनाने हेतु कुछ सहायक साधनों की आवश्यकता होती है। गणित-शिक्षण के विषय में भी यही बात सत्य है। **फ्रोबेल** का कथन है कि "पाठ स्थूल से आरंभ होकर सूक्ष्म पर समाप्त होना चाहिए।" जिन साधनों या सामग्रियों के द्वारा सूक्ष्म ज्ञान को स्थूल रूप देकर स्पष्ट और सरल बनाया जाता है उन्हें हम शिक्षण सामग्री या सहायक सामग्री के नाम से पुकारते हैं। गणित-शिक्षण की आवश्यकता और महत्व पर संक्षेप में प्रकाश डाला जा रहा है-

1. ज्ञानेन्द्रियों का महत्व- बालकों के किसी ज्ञान का महत्व केवल कल्पना अथवा पुस्तकों को पढ़ लेने की अपेक्षा अपनी ज्ञानेन्द्रियों के माध्यम से अधिक सुगमता के साथ और स्थायी रूप में होता है। ज्ञानेन्द्रियां ही वास्तव में ज्ञान के द्वार हैं। गणित-शिक्षण की सहायक सामग्री के माध्यम से ज्ञान को ज्ञानेन्द्रियों की पहुँच में लाया जाता है और उनके माध्यम से उनके मस्तिष्क में उसे बैठाया जाता है।

2. स्थूल और प्रत्यक्ष का महत्व- सूक्ष्म तत्वों को स्थूल रूप देने और छात्रों के प्रत्यक्षीकरण में आने देने तथा योग्य बनाने के लिए शिक्षण में सहायक सामग्री का उपयोग किया जाता है। गणित एक ऐसा विषय है जिसमें सूक्ष्म से सूक्ष्म तत्वों का विवेचन होता है। इन सूक्ष्म तत्वों को स्थूल रूप देने में सहायक सामग्री सहायक सिद्ध होती है।

3. स्पष्ट एवं स्थायी धारणा या परिकल्पना- छात्रों को जो भी ज्ञान प्रदान किया जाता है उसके प्रति उनकी धारणा या परिकल्पना स्पष्ट हो सकती है, जबकि उसे स्थूल और प्रत्यक्ष रूप में प्रस्तुत किया जाए ।

4. रोचकता एवं मनोरंजन का महत्व- अनेक लोगों की यह धारणा है कि गणित एक अरोचक और अप्रिय विषय है। सहायक सामग्री के माध्यम से इस विषय को रोचक और मनोरंजक बनाया जाता है, जिससे कि छात्रों में विषय के प्रति उकताहट और अरुचि उत्पन्न न हो।

5. ध्यान एवं एकाग्रता का महत्व- गणित विषय में छात्रों का ध्यान विषय की ओर लगाना और उनके मन को एकाग्र बनाने के लिए सहायक सामग्री उपयोगी सिद्ध होती है।

6) शिक्षक के लिए सरलता- शिक्षण सामग्री के उपयोग से शिक्षक अपने विषय को सरल और सुगम रूप से छात्रों के सम्मुख रखने में समर्थ होता है और शिक्षण कार्य की आकर्षक बनाता है।

पेस्टालौजी का विचार है, बच्चों के संपर्क में आने वाली तथा उनकी रूचि भावनाओं के विचार से सरोकार रखने वाली बातों से संबंधित करके ही उन्हें शिक्षा दी जानी चाहिए।

गणितीय गतिविधि

गणित में कार्य विशेषकर दो रूपों में होता है- (1) लिखित और (2) मौखिक। इन दोनों ही रूपों का अपना स्थान है। आधुनिक युग में प्राय: लिखित रूप को ही अधिक महत्व दिया जाता है, परंतु मौखिक कार्य की अवहेलना भी नहीं की जा सकती। लिखित और मौखिक दोनों ही प्रकार के कार्यों में मानसिक कार्य की आवश्यकता होती है। वास्तव में मानसिक गणित के कार्य को मौखिक और लिखित गणित के कार्य से अलग नहीं किया जाना चाहिए क्योंकि गणित चाहे मौखिक हो चाहे लिखित, दोनों में ही मानसिक कार्य की आवश्यकता होती है।

मानसिक कार्य- वास्तव में गणित की समस्त क्रियाएँ मानसिक ही होती हैं। चाहे कार्य को लिखित रूप से लिया जाए अथवा मौखिक रूप में मानसिक शक्ति के प्रयोग के बिना वह नहीं किया जा सकता। मानसिक गणित में किसी प्रकार की कलम या कागज की आवश्यकता नहीं, बल्कि उसके अंतर्गत हम किसी प्रश्न का उत्तर मन-ही-मन गणना करके निकाल लेते हैं। गणित की तीनों ही शाखाओं- अंकगणित, बीजगणित और रेखागणित में मानसिक कार्य की आवश्यकता होती है। रेखागणित की शिक्षा तो पूरी तरह से मानसिक ही होती है। यदि अंकगणित और बीजगणित में एक प्रश्न को हल करने की हमें जानकारी हो जाती है तो हम उसी तरह के अन्य प्रश्नों का हल भी निकाल लेते हैं।

मौखिक और मानसिक गणित- वास्तव में मौखिक गणित और मानसिक गणित में कोई विशेष अंतर नहीं है। मौखिक गणित के अंतर्गत भी मानसिक गणित की आवश्यकता होती है। जिस कार्य को बिना मानसिक शक्ति लगाए यंत्रवत या आदत-अभ्यास के बल पर मौखिक रूप से किया जाए वह मौखिक कार्य और जिसमें शक्ति अर्थात् विचार, चिंतन, तर्क/विश्लेषण आदि का आश्रय लेना पड़ता है वह कार्य मानसिक कार्य है।

मानसिक कार्य के उद्देश्य

गणित-शिक्षण में छात्रों से जो मानसिक कार्य करवाया जाता है उसके निम्नलिखित उद्देश्य होते है-

1) छात्रों में विचार-शक्ति, तर्क-शक्ति और ध्यान की एकाग्रता का विकास करना।

2) छात्रों की स्मरण-शक्ति का विकास करना।

3) छात्रों में व्यावहारिक जीवन के हेतु गणितीय क्षमता उत्पन्न करना।

4) छात्रों में भावात्मक चिंतन की आदत डालना।

मौखिक कार्य

गणित के उस कार्य को जिसमें बिना कागज, पेन्सिल आदि की सहायता से समस्या या प्रश्न को हल किया जाता है, उसे मौखिक कार्य के नाम से पुकारा जाता है। हमारे दैनिक जीवन का यह अनुभव है कि बाजार में दूकानदार छोटे-मोटे हिसाब-किताब को बिना कागज-पेन्सिल के जबानी ही हल कर लेता है। यह मौखिक कार्य

के अंतर्गत आता है। मानसिक गणित मौखिक हो सकता है और मौखिक नही भी हो सकता है। कक्षा-शिक्षण में जब अध्यापक गणित का संचालन मौखिक रूप से करता है, अर्थात जब अध्यापक द्वारा बोलकर पूछे गए प्रश्नों को सुनाकर छात्र मन-ही-मन गणना करके अंतिम उत्तर निकाल लेते हैं तो इस प्रकार के मौखिक रूप से संचालित मानसिक गणित को मौखिक गणित कहा जाता है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

4. गणितीय चिंतन में शिक्षण-सहायक सामग्री की उपयोगिता को बताएँ।

.....

.....

5. गणित शिक्षण से जुड़ी गतिविधियों की सूची बनाएँ।

.....

.....

4.5.1 गणित से जुड़ी कहानियां और तकनीकी का उपयोग

गणित की समस्याओं को कहानियों में पिरोकर छात्रों के सम्मुख रखने से गणित के प्रति छात्रों में रुचि बढ़ती है। इससे अक्सर इस बात का पता ही नहीं चलता है कि क्या गणित कहानी को आगे बढ़ा रही है या कहानी गणित को धकेल रही है। एनोस मैजिक सीड्स एक विलक्षण पुस्तक है। इसे जापान के बहुचर्चित और पुरस्कृत लेखक मित्सुमा एनो (जन्म 1926) ने लिखा है। एनो कि खासियत यह है कि वे गणित की गूढ़ अवधारणाओं को कहानियों में बेहद सुंदर तरीके से पिरोते हैं।

उदाहरण के लिए, जैक एक आलसी युवा है। एक दिन उसकी मुलाकात एक बूढ़े साधू से होती है, जो उसे दो सुनहरे जादुई बीज देता है। और तब से जादू शुरू होता है। एक बीज खाने के बाद जैक को पूरे साल भूख नहीं लगती है। साधू के कहे अनुसार जैक दूसरे बीज को जमीन में बो देता है और उस पेड़ से अगले साल उसे दो सुनहरे बीज मिलते हैं। एक बीज जैक के पेट को साल भर के लिए तृप्त रखता है। जैक दूसरा बीज बो देता है। पेड़ में हर बार दो बीज पैदा होते हैं। इस प्रकार हर साल जैक एक बीज खाता है और दूसरे को बोता है। इस तरह जैक का जीवन मजे से चलता है। फिर एक साल जैक मेहनत-मजदूरी कर भोजन की जुगाड़ करता है और एक की बजाए दोनों बीजों को बो देता है। अगले साल उसे 4 बीज मिलते हैं। वो एक को खाकर 3 को बो देता है। अगले साल उसे 6 बीजों की फसल मिलती है, जिसमें से एक को खाकर वो 5 को बोता है। इससे उसके बीजों का खजाना बढ़ता है और वह धनी बन जाता है। कुछ समय बाद जैक का विवाह होता है और एक बच्चा भी। वो न केवल अपने परिवार का भरण-पोषण कर पाता है पर उसकी तक़दीर का सितारा चमकता है और उसकी संपत्ति दिन-दूनी, रात-चौगूनी बढ़ती है। फिर एक जबरदस्त तूफान आता है, जिसमें उसकी सारी धन-दौलत वह जाती है। जैक के पास बस कुछ ही जादुई बीज बचते है, जिसे उसने एक पेड़ की ऊँची शाख से बांध कर सुरक्षित रखा था। जैक, उसकी पत्नी और बच्चा उनकी जान बचाने के लिए भगवान का नमन करते है, और फिर अपनी जिंदंगी को दोबारा से शुरू करते है। अंत में समझदार जैक अपने बिखरे हुए जीवन को दोबारा से शुरू करने की हिम्मत बटोरता है। कहानी असली जीवन के तमाम संदर्भ प्रतिबिंबित करती है। गर्दिश और गरीबी के बाद जैक सफलता

हासिल करता है। पर प्राकृतिक आपदा जैक की सारी संपत्ति को बहा ले जाती है और यह अनुभव उसे और नम्र बनाता है। इससे गणित के प्रति बच्चों की अभिरुचि का विकास होता है।

4.5.2 गणित शिक्षण में तकनीकी का उपयोग: कंप्यूटर

शिक्षण-अधिगम में आज कंप्यूटर का प्रयोग तेजी से बढ़ता जा रहा है। सारे संसार में इसका महत्व बढ़ रहा है और इसके द्वारा अधिगम अधिक से अधिक लोकप्रिय होता जा रहा है। इसकी बहुआयामी कार्यक्षमता ने शिक्षा के क्षेत्र में ही नही अन्य क्षेत्रों में भी इसे काफ़ी हद तक लोकप्रिय बना दिया है। इसका अनुमान तो इसी से लग जाता है कि बहुत से विद्यालय तो कक्षा दो से ही बालकों को कंप्यूटर की कार्य प्रणाली का ज्ञान देना आरंभ कर रहे है। भारत सरकार के क्लास प्रोजेक्ट (Computer Literacy of Secondary School) ने विद्यालय स्तर पर शिक्षण में क्रांति पैदा कर दी है।कंप्यूटर का तीन प्रमुख कार्यों में प्रयोग किया जा रहा है

1) शोध में

2) प्रबंधन में और

3) शिक्षण अधिगम में

इन सभी क्षेत्रों में कंप्यूटर को दो मुख्य कारणों से प्रयोग किया जाता है-

1) परिकलन की मशीन के रूप में- कंप्यूटर सुविधा की व्यापक व्यवस्था का, उच्च स्तरीय शिक्षा के पाठ्यक्रम पर सुस्पष्ट प्रभाव पड़ता है। समान परिकलन का बोझ कंप्यूटर पर डालकर छात्रों को लंबी परिकलनों के उलझन से बचाया जाता है, जिससे वह पाठ्यक्रम के सैद्धांतिक पक्ष पर अधिक ध्यान दे सके।

2) शिक्षण-अधिगम में सहायक के रूप में- कंप्यूटर का प्रयोग एक ऐसी अत्यधिक परिष्कृत मशीन के रूप में किया जा रहा है, जो मानव शिक्षक के बहुत से कार्यों की जगह ले सकती है या कहीं-कहीं उसकों भी मात दे सकती है। बहुत से शिक्षाविदों ने इन सभी चीजों को ध्यान में रखते हुए उन सभी चीजों को रखते है, जो कंप्यूटर अनुदेशन को व्यक्तिगत बनाने में या सुधारने में सहायक हो।

3) शैक्षिक प्रबंधन में- इसमें कंप्यूटर का प्रयोग, उसकी परिकलन और आँकड़ों के संसाधन तथा उसके कंप्यूटर सहायक अधिगम के बीच की व्यवस्था है।

इलेक्ट्रोनिक माध्यमों के उपयोग में शिक्षक की भूमिका-

इलेक्ट्रोनिक माध्यम की निराशाजनक प्रगति की गति इस तथ्य के कारण कि शिक्षा व्यक्ति का विकास है और व्यक्ति मशीन नही है, न ही मशीन के समान है। उन महत्वपूर्ण तरीकों जिससे मानव-शिक्षक छात्रों से पारस्परिक क्रियाएँ करता है, उनमें से केवल कुछ ही नक़ल इलेक्ट्रोनिक माध्यमों से की जा सकती है। भविष्य के दृष्टिकोण से यह मानना चाहिए कि वर्तमान अनुदेशन माध्यम में छात्रों के अधिगम की प्रभावशीलता को बढ़ाने की अद्भुत क्षमता है, फिर मशीन को वह सब करने देने के स्थान पर जो शिक्षक नहीं करता हमें यह प्रश्न पूछना चाहिए कि वह क्या है, जो शिक्षक कर सकता है, मशीन नहीं कर सकता है, उसके उत्तर इस प्रकार दिये गए हैं-

1) हमारे अनुभव चेतन होते है, परंतु मशीन में चेतना नहीं होती।

2) हमें सदैव तार्किक होने की आवश्यकता नहीं होती, हमारे पास बोधगम्य चिंतन के अन्य तरीके भी है, जो मशीन के पास नहीं है।

3) मशीन केवल प्रतिक्रिया करती है, पहल नहीं करती।

4) मशीन में सामाजिक आवश्यकताओं को पूरा करने की क्षमता नही है।

इस प्रकार यह तर्क युक्त लगता है कि इलेक्ट्रोनिक माध्यमों का प्रयोग मानव-शिक्षक को सहायता देने के लिए ही होना चाहिए, ये शिक्षक का स्थान कभी नहीं ले सकते।

अपनी प्रगति की जाँच करें

6. गणित शिक्षण में तकनीकी के उपयोग पर प्रकाश डालिए।

.....

.....

4.6.0 गणित की प्रकृति और गणित सीखने के विषय में शिक्षक के विश्वास और ज्ञान का गणित शिक्षण में महत्व

विश्वास (belief) से तात्पर्य उस बात से है जिसे कोई व्यक्ति सत्य समझता है। विश्वास, किसी व्यक्ति की व्यक्तिगत गुण, मानसिक निरूपण (representation), दिमागी रूप से गठित है। विश्वास को सभी संसाधनों के उस संपूर्ण गुण के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, जो किसी विशिष्ट परिस्थिति में संचालित होता है। विश्वास की प्रणाली में, ज्ञानमीमांसीय विश्वास को उसके केंद्र-भाग/अंतभार्ग में माना जाता है। बहुत शोध यह बताते हैं कि ज्ञानमीमांसीय विश्वास संदर्भ(context) से स्वतंत्र होती है। शैक्षिक मनोवैज्ञानिकों के अनुसार ज्ञानमीमांसीय विश्वास ज्ञान की प्रकृति के विषय में विश्वास को माना जाता है। सिद्धांत के अनुसार कहा जा सकता है कि इसमे ज्ञान की सत्यता, स्रोत, प्रामाणिकता, अर्जन/संकलन, और संरचना के विषय में विश्वास सम्मिलित है। ज्ञानमीमांसीय विश्वास को विस्तृत रूप में किसी व्यक्ति की व्यक्तिपरक/आत्मनिष्ठ विश्वास जो उसे बताता है कि ज्ञान क्या है और सीखना तथा सिखाना को कैसे संपादित किया जा सकता है। ज्ञानमीमांसीय विश्वास क्षेत्र विशिष्ट होता है। यह ज्ञानमीमांसीय विश्वास को सीखने के लिए 'प्रतिभा होनी चाहिए' या 'प्रयत्न होनी चाहिए', शिक्षण में मायने रखता है। गणितीय विश्वास गणित की प्रकृति और गणित सीखाने-सीखाने की प्रक्रिया का व्यक्तिगत दर्शन या अवधारणा/संकल्पना को बताता है।

4.7.0 विद्यालयी गणित की उत्कृष्टता में शिक्षक की भूमिका

शिक्षक चाहे किसी भी विषय का हो, वह विद्यार्थियों की अपेक्षा अनुभव एवं विषय के ज्ञान में उच्च स्थान पर होता है, जहाँ से वह ज्ञान को किसी माध्यम द्वारा विद्यार्थियों के मस्तिष्क में पहुँचाता है एवं उनके व्यवहारों में परिवर्तन लाता है। इस कार्य अर्थात् ज्ञान को दूसरे स्थान (विद्यार्थी तक) तक पहुँचाना कोई आसान कार्य नहीं है; या यूं कहा जाए कि केवल ज्ञान अधिक प्राप्त कर लेने से ही हम उसे एक शिक्षक की संज्ञा नहीं दे सकते। ज्ञान का आधिक्य तो महत्वपूर्ण है ही, मगर इसके अतिरिक्त और अन्य कई गुण शिक्षक के लिए होते हैं, जिन्हें उसमें होना चाहिए। शिक्षक का मुख्य रूप से कार्य होता है- शिक्षण द्वारा बालकों में तर्क करने, सोचने, विश्लेषण करने, उचित परिस्थिति में प्राप्त ज्ञान का उपयोग करने, निर्णय इत्यादि करने के गुणों का विकास करने और इन सभी के लिए उन्हें प्रशिक्षित करना। अपने विद्यार्थियों में वह आत्मविश्वास, आत्मनिर्भरता, शुद्धता गति

जैसे गुणों या प्रवृत्तियों का विकास करें। यह सब कार्य प्रत्येक शिक्षक नहीं कर सकता है। केवल वही शिक्षक इस योग्य होता है, जिसमें एक शिक्षक के गुण विद्यमान मान होते हैं। फिर भी चाहे जो भी हो, एक शिक्षक के महत्व की किसी भी प्रकार से उपेक्षा नहीं की जा सकती है। शिक्षा-जगत में उसका अपना एक अलग विशिष्ट स्थान है। वह प्रेरणा तथा ज्ञान का सजीव स्रोत है। उसको एक सफल गणित शिक्षक प्रमाणित होने के लिए तथा विद्यालयी गणित में उत्कृष्टता के लिए निम्नलिखित विशेषताओं एवं गुणों को स्वयं में विकसित करना परमावश्यक है-

अ) व्यक्तिगत योग्यताएँ

एक सफल शिक्षक वही शिक्षक है, जिसमें निम्नलिखित व्यक्तिगत योग्यताएँ होती हैं-

1. उदारता एवं नम्रता- गणित के शिक्षक को अपने छात्रों के प्रति उदार होना चाहिए और उनसे विनम्रता का व्यवहार करना चाहिए।

2. सहानुभूति एवं प्रोत्साहन- जो शिक्षक अपने छात्रों के प्रति सहानुभूति नहीं रखता वह गणित का शिक्षण उचित रूप से प्रदान नहीं कर सकता। साथ ही उसे छात्रों को प्रोत्साहित करने के लिए सदैव तत्पर रहना चाहिए।

3. कमजोर छात्रों की ओर ध्यान देना- गणित के शिक्षक में एक गुण यह भी होना चाहिए कि वह कमजोर छात्रों की ओर विशेष रूप से ध्यान दे।

4. धैर्य एवं सहिष्णुता- छात्रों को गणित का पाठ समझाने में अत्यंत धैर्य की आवश्यकता होती है। इस धैर्य के अभाव में गणित के अध्यापक छात्रों पर खींझ उठते हैं। यदि अध्यापक धैर्यवान है, तो वह छात्र की समझ में यदि कोई बात एक बार में नहीं आती है तो उसे बार-बार बतलाता है। गणित अध्यापक को छात्र के प्रति सहिष्णुता का व्यवहार करना चाहिए।

5. साधन-तत्परता- गणित के अध्यापक में साधन-तत्परता भी होनी चाहिए। जिन अध्यापकों में यह योग्यता होती है वे समय अथवा आवश्यकता के अनुसार तुरन्त साधन या उदाहरण खोज लेते हैं और अपने इस शिक्षण को सफल बना पाते हैं।

ब) सामाजिक गुण

गणित अध्यापक में व्यक्तिगत गुणों के साथ-साथ कुछ सामाजिक गुण भी होने चाहिए।

1. पक्षपातरहित होना- यदि गणित का अध्यापक कुछ छात्रों की ओर विशेष रूप से ध्यान देता है और कुछ की अवहेलना करता है तो वह एक सफल शिक्षक नहीं हैं। उसे धनी, निर्धन, परिचित-अपरिचित और कुशल-अकुशल का भेदभाव नहीं बरतना चाहिए।

2. चरित्रवान एवं न्यायपूर्ण- गणित के अध्यापक को चरित्रवान होना चाहिए। साथ ही उसे सदैव न्याय के पथ पर चलने वाला होना चाहिए।

3. सामाजिकता एवं मिलनसारिता- गणित-शिक्षण में सामाजिकता और मिलनसारिता की भावना भी होना चाहिए। गणित का जो अध्यापक सामाजिक नहीं है और छात्रों से कटा-कटा घूमेगा वह उन्हें उचित शिक्षण नहीं प्रदान कर सकता।

स) व्यावसायिक योग्यताएँ

गणित-अध्यापक में अन्य अध्यापकों की भांति व्यक्तिगत योग्यताओं और सामाजिक योग्यताओं का होना तो आवश्यक है ही, साथ ही यदि उसमें व्यावसायिक योग्यताएँ नहीं हैं तो वह अपने विषय का शिक्षण कभी उचित

रूप से नहीं प्रदान कर सकता। यहाँ हम गणित-शिक्षक की व्यावसायिक योग्यताओं पर संक्षेप में प्रकाश डालते हैं-

1. गणित विषय के प्रति अभिरुचि होना- वही गणित-शिक्षक अच्छा शिक्षक बन सकता है जिसे अपने विषय में अभिरुचि हो, जिसे गणित के सामान्य प्रश्नों को हल करने में आनन्द आता हो।

2. विषय का पूर्ण ज्ञान- गणित-शिक्षक को गणित विषय पर पूर्ण रूप से अधिकार होना चाहिए। उसे अपने विषय की पूर्ण जानकारी होनी चाहिए। गणित के शिक्षण के लिए अध्यापक को केवल गणित विषय का ज्ञान होना ही आवश्यक नहीं है, बल्कि उसका प्रयोग जहाँ-जहाँ होता हो उसकी भी पूर्ण जानकारी उसे होनी चाहिए।

3. शिक्षण विधियों का ज्ञान- गणित के शिक्षक को एक प्रशिक्षित शिक्षक होना चाहिए और उसे विभिन्न पाठों को पढ़ाने के लिए कौन-सी विधि उत्तम होगी इस बात की जानकारी भी होनी चाहिए।

4. छात्रों की कठिनाइयों को समझना- गणित का सफल शिक्षक छात्रों की कठिनाइयों को भलीभाँति समझने वाला होता है।

5. पाठ की संपूर्ण तैयारी- गणित-शिक्षक को अपने विषय का पूर्ण ज्ञान होना ही चाहिए कि जिस पाठ को वह कक्षा में पढ़ाने जा रहा है उसे उसकी पूरे तरीके से तैयारी अवश्य करनी चाहिए।

6. पर्याप्त अभ्यास करना- गणित-शिक्षक का एक यह भी व्यावसायिक गुण है कि वह छात्रों को एक नियम अथवा विधि सीखाने के बाद उन्हें पर्याप्त अभ्यास कराए।

7. स्पष्ट ढंग से प्रस्तुति की योग्यता- गणित अध्यापक में यह भी योग्यता होनी चाहिए कि वह जो भी विषय या प्रकरण छात्रों के सम्मुख प्रस्तुत करे उसे वह तर्कयुक्त विवेचना के आधार पर अत्यंत स्पष्ट रूप से प्रस्तुत करे।

8. गणित से संबंधित आधुनिकतम ज्ञान- गणित का एक कुशल शिक्षक वही है, जो गणित क्षेत्र में हुई नवीनतम खोजों की जानकारी रखता हो।

अपनी प्रगति की जाँच करें

7. विद्यालयी गणित की उत्कृष्टता में शिक्षक की भूमिका पर प्रकाश डालिए।

.....

.....

4.8.0 सारांश

आज के युग में, हमें संख्यात्मक सोच की बेहद जरूरत है। परंतु स्कूल की गणित में आम जिंदगी की समस्याओं का बहुत कम ही जिक्र होता है। गणित की कक्षाओं में बच्चों को फालतू और उबाऊ समस्याओं से जूझना पड़ता है। कक्षा में सीखने की संस्कृति विकसित करना आज की परिस्थिति में एक चुनौतीपूर्ण कार्य है। गणित सीखने की संस्कृति विकसित करने के लिए गणित शिक्षक को गणित से जुड़ी विभिन्न गतिविधियाँ कक्षा में करानी चाहिए जिससे कि कक्षा में सक्रिय वातावरण का निर्माण हो सके। शिक्षक की संचार प्रणाली गणित शिक्षण में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। शिक्षक का विषय ज्ञान भी शिक्षण प्रक्रिया को प्रभावित करता है।

4.9.0 अपनी प्रगति की जाँच के लिए अपेक्षित उत्तर

1. 4.3.0 सीखने की संस्कृति
2. 4.3.1 कक्षा में सक्रिय वातावरण का निर्माण
3. 4.4.1 कक्षा में गणितज्ञों का समूह बनाना: गणितीय क्लब
4. 4.5.0 गणितीय चिंतन में श्रव्य-दृश्य सामग्री
5. 4.5.0 गणितीय गतिविधि
6. 4.5.1 गणित से जुड़ी कहानियां और तकनीकी का उपयोग
7. 4.7.0 विद्यालयी गणित की उत्कृष्टता में शिक्षक की भूमिका

4.10.0 संदर्भ पुस्तकें

- सिंह, योगेश कुमार (2010). गणित शिक्षण: आधुनिक पद्धतियाँ. नई दिल्ली: ए.पी.एच. पब्लिशिंग हाउस.
- मंगल, एस.के. (2005). गणित शिक्षण. नई दिल्ली: आर्य बुक डिपो
- नेगी, जे.एस. (2007). गणित शिक्षण. आगरा: विनोद पुस्तक मंदिर
- कुल्श्रेस्ठ, ए.के. (2007). गणित शिक्षण. मेरठ: आर. लाल बुक डिपो
- The Teaching of Mathematics by I.W.A. Young.
- The Teaching of Mathematics by K.S. Sidu.
- AMT-01. Teaching Mathematics. IGNOU Series.
- Boyer, C. B. (1968). History of Mathematics. New York: John Wiley.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-49.
- Devlin K. (2011).Introduction to Mathematical thinking. Ernest P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education.

इकाई – 5
गणित शिक्षण में मूल्यांकन

इकाई संरचना
5.1.0 उद्देश्य
5.2.0 प्रस्तावना
5.3.0 मापन और मूल्यांकन की अवधारणा
5.3.1 मापन का प्रत्यय
5.3.2 मूल्यांकन का प्रत्यय
5.4.0 मूल्यांकन उपकरण: अर्थ और आवश्यकता
5.4.1 मापन तथा मूल्यांकन की तकनीकें
5.4.2 मापन व मूल्यांकन के उपकरण
अपनी प्रगति की जाँच करें
5.5.0 नैदानिक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण
5.6.0 व्यक्तिनिष्ठ और वस्तुनिष्ठ परीक्षण
अपनी प्रगति की जाँच करें
5.7.0 संरचनात्मक और योगात्मक मूल्यांकन
5.8.0 सतत और व्यापक मूल्यांकन
अपनी प्रगति की जाँच करें
5.9.0 निकष संदर्भित और मानक संदर्भित मूल्यांकन
5.10.0 ब्लू-प्रिंट की रचना और गणित में शिक्षक निर्मित उपलब्धि परीक्षण का निर्माण
अपनी प्रगति की जाँच करें
5.11.0 सारांश
5.12.0 अपनी प्रगति की जाँच के लिए अपेक्षित उत्तर
5.13.0 संदर्भ पुस्तकें

5.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

- मापन और मूल्यांकन में अंतर को स्पष्ट कर सकेंगे।
- मूल्यांकन एवं मूल्यांकन उपकरण की आवश्यकता का वर्णन कर सकेंगे।
- नैदानिक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण के महत्व को समझ सकेंगे।
- व्यक्तिनिष्ठ और वस्तुनिष्ठ परीक्षण में अंतर कर सकेंगे।
- संरचनात्मक और योगात्मक मूल्यांकन का वर्णन कर सकेंगे।

- सतत एवं व्यापक मूल्यांकन की आवश्यकता का वर्णन कर सकेंगे।
- शिक्षक निर्मित उपलब्धि परीक्षण का निर्माण कर सकेंगे।

5.2 प्रस्तावना

शिक्षा सतत रूप से चलने वाली एक गत्यात्मक प्रक्रिया है। गत्यात्मक प्रकृति की वजह से शिक्षा के क्षेत्र में समय समय पर भिन्न भिन्न प्रकार की परिस्थितियां उत्पन्न होती रहती है, जो शिक्षाविदों के सम्मुख नई-नई चुनौतियों को प्रस्तुत करती रहती है। उन्हें उन चुनौतियों एवं समस्याओं का समाधान खोजना पड़ता है। नि:संदेह किसी समस्या से संबंधित सूचना की पर्याप्तता, संदर्भता तथा यथार्थता ही उस समस्या के सही समाधान की दिशा में एक अत्यंत आवश्यक तथा प्रथम कदम होता है। इसलिए निर्णयकर्ता चाहता है कि
अ) उसे समस्या से संबंधित विभिन्न परिस्थितियों की अधिक से अधिक सूचनाएं प्राप्त हो सके,
ब) उसे प्राप्त होने वाली सूचनाएं समस्या के सभी पक्षों से घनिष्ठ रूप से संबंधित हो, तथा
स) उसे प्राप्त होने वाली सूचनाएं अधिक से अधिक यथार्थ हों व वास्तविक तथ्यों पर आधारित हों।
समस्याओं के संबंध में सूचना की पर्याप्तता, संदर्भता तथा यथार्थता को सुनिश्चित करने के लिए ही व्यावहारिक विज्ञानों में मापन तथा मूल्यांकन की विभिन्न विधियों के प्रयोग की आवश्यकता होती है।

5.3 मापन और मूल्यांकन की अवधारणा

5.3.1 मापन का प्रत्यय (Concept of Measurement)

'मापन' शब्द का प्रयोग अत्यंत प्राचीन काल से दैनिक जीवन के विभिन्न क्षेत्रों में बहुतायत से किया जाता रहा है। प्रत्येक व्यक्ति अपने दैनिक कार्यों के दौरान अनेक बार औपचारिक अथवा अनौपचारिक ढंग से विभिन्न बातों का मापन करता रहता है। वस्त्र विक्रेता कपड़ा नाप कर देता है, ग्वाला दूध नाप कर बिक्री करता है, कार चालक कार की गति देखकर ही कार चलाता है, बिजली विभाग विदयुत की खपत मापकर उसका देयक उपभोक्ता को देता है। ये सभी दैनिक जीवन में मापन के सरल उदाहरण है।
रिचर्ड.एच. लिन्डेमैन ने मापन के अर्थ को स्पष्ट करते हुए लिखा है कि-
"मापन को किन्हीं मान्य नियमों के अनुरूप व्यक्तियों अथवा वस्तुओं के किसी समुच्चय के प्रत्येक तत्व को अंकों के किसी समुच्चय से एक अंक आवंटित करने के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।"
एस.एस. स्टीवेन्स के अनुसार-
"मापन किन्हीं स्वीकृत नियमों के अनुसार वस्तुओं को अंक प्रदान करने की प्रक्रिया है।"
ब्रेडफील्ड तथा मोरडोक के शब्दों में-

"मापन किसी घटना के विभिन्न आयामों को प्रतीक आवंटित करने की प्रक्रिया है, जिससे उस घटना की स्थिति का यथार्थ निर्धारण किया जा सके।"

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि मापन के द्वारा व्यक्तियों या वस्तुओं में उपस्थित किसी गुण अथवा विशेषता का यह वर्णन गुणात्मक भी हो सकता है और मात्रात्मक भी।

जैसे व्यक्तियों को उनकें लिंगभेद के आधार पर पुरुष या महिला कहना गुणात्मक मापन का सरल उदाहरण है। किसी गुण अथवा विशेषता के मात्रात्मक वर्णन में व्यक्ति अथवा वस्तु में उपस्थित उस गुण या विशेषता की मात्रा को बताया जाता है। स्पष्ट है कि मात्रात्मक मापन में 'कितना' प्रश्न का उत्तर प्रदान किया जाता है, जबकि गुणात्मक मापन में 'किस प्रकार का' प्रश्न का उतर दिया जाता है।

अत: कहा जा सकता है कि मापन में व्यक्तियों अथवा वस्तुओं को ऐसे शब्द, अंक, अक्षर, अथवा संकेत प्रदान किए जाते हैं, जो उन व्यक्तियों या वस्तुओं में उपस्थित संदर्भित गुण के प्रकार को अथवा मात्र को अभिव्यक्त कर सकें।

5.3.2 मूल्यांकन का प्रत्यय (Concept of Evaluation)

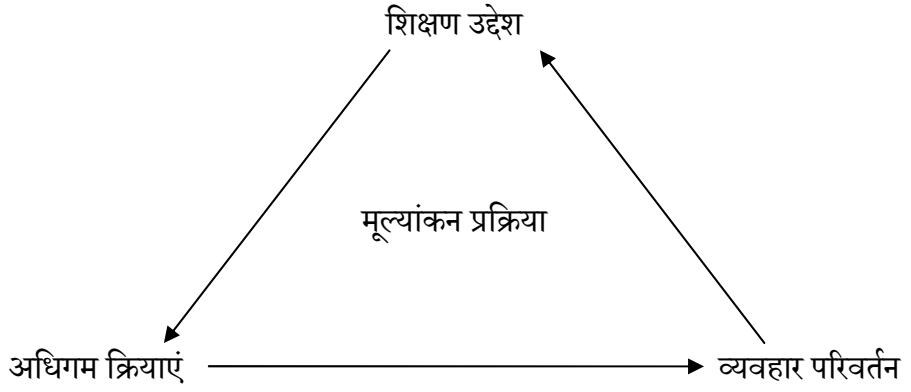
मूल्यांकन का शाब्दिक अर्थ मूल्य का अंकन करना है। दूसरे शब्दों में मूल्यांकन मूल्य निर्धारित करने की एक प्रक्रिया है। मापन की अपेक्षा मूल्यांकन व्यापक हैं। मापन के अंतर्गत किसी व्यक्ति अथवा वस्तु के गुणों अथवा विशेषताओं का वर्णन मात्र ही किया जाता है, जबकि मूल्यांकन के अंतर्गत उस व्यक्ति अथवा वस्तु के गुणों अथवा विशेषताओं की वांछनीयता पर दृष्टिपात किया जाता है। अत: मापन वास्तव में मूल्यांकन का एक अंग मात्र है।

एच.एच. रैमर्स तथा एन. एल. गेज ने मूल्यांकन को परिभाषित करते हुए लिखा है कि, "मूल्यांकन में व्यक्ति अथवा समाज अथवा दोनों की दृष्टि से क्या अच्छा है अथवा क्या वांछनीय है का विचार या लक्ष्य निहित रहता है।"

एन.एम.दांडेकर के शब्दों में-

"मूल्यांकन को छात्रों के द्वारा शैक्षिक उद्देश्यों को प्राप्त करने की सीमा ज्ञात करने की क्रमबद्धता प्रक्रिया के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।"

NCERT ने मूल्यांकन के प्रत्यय को स्पष्ट करते हुए कहा है कि यह एक ऐसी सतत एवं व्यापक प्रक्रिया है, जो देखती है कि (अ)निर्धारित शैक्षिक लक्ष्यों की प्राप्ति किस हद तक हो रही है, (ब)कक्षा में दिए गए अधिगम अनुभव कितने प्रभावशाली रहे है, तथा (स)शिक्षा के उद्देश्य कितने अच्छे ढंग से पूर्ण हो रहे हैं।



चित्र 1 : मूल्यांकन का प्रत्यय

स्पष्ट है कि मूल्यांकन प्रक्रिया में शिक्षण उद्देश्यों की प्राप्ति की वांछनीयता को देखा जाता है।इस प्रकार से मूल्यांकन प्रक्रिया के तीन प्रमुख अंग – (अ) शिक्षण उद्देश्य (ब) अधिगम क्रियाएँ (स) व्यवहार परिवर्तन है। मूल्यांकन के ये तीनों अंग परस्पर एक दूसरे से संबंधित तथा एक दूसरे पर निर्भर रहते हैं।

5.4 मूल्यांकन उपकरण : अर्थ और आवश्यकता

पिछले इकाई में मापन और मूल्यांकन के प्रत्यय को स्पष्ट किया जा चुका है। मापन के द्वारा छात्रों के विभिन्न व्यवहारों, योग्यताओं, क्षमताओं, गुणों आदि के साथ-साथ उनके शैक्षिक विकास का गुणात्मक व मात्रात्मक वर्णन किया जाता है, जबकि मूल्यांकन के द्वारा छात्रों के शैक्षिक विकास की वांछनीयता को सुनिश्चित करने का प्रयास किया जाता है। छात्रों के व्यवहारों, योग्यताओं, क्षमताओं, गुणों आदि का मापन करने तथा शैक्षिक विकास का आंकलन करने के लिए विभिन्न प्रकार के तकनीकों और उपकरणों की आवश्यकता होती है। जिन उपकरणों व तकनीकों का उपयोग छात्रों के विभिन्न प्रकारों के व्यवहारों के मापन के लिए किया जाता है उन्हें मापन व् मूल्यांकन के उपकरणों व तकनीकों के नाम से संबोधित किया जाता है।

मापन व मूल्यांकन के उपकरण की आवश्यकता - शैक्षिक मापन व मूल्यांकन के द्वारा छात्रों की शैक्षिक प्रगति को ठीक ढंग से जारी रखने का प्रयास किया जाता है एवं जिसके परिणामों को पृष्ठपोषण के लिए सफलतापूर्वक प्रयुक्त किया जाता है। मूल्यांकन के द्वारा शिक्षण तथा निर्देशन के लिए आवश्यक सूचनायें प्राप्त होती है। यह शिक्षा-प्रक्रिया का एक आवश्यक अंग है जो मापन करता है कि-

(अ) निश्चित समय में कहाँ तक उद्देश्यों की पूर्ति की गयी है?

(ब)बालकों की योग्यता एवं कुशलता में कितनी वृद्धि हुई है?

(स) बालकों के व्यवहार में कितना परिवर्तन आया है?

मूल्यांकन के लिए हमें मूल्यांकन उपकरणों की आवश्कता होती है।

5.4.1 मापन तथा मूल्यांकन की तकनीकें

मापन तथा मूल्यांकन के लिए प्रयुक्त की जाने वाली विभिन्न तकनीकों को पांच मुख्य भागों में बाँटा जा सकता है। ये पाँच भाग निम्नवत है-

(अ) अवलोकन तकनीक

(ब) स्व-आख्या तकनीक

(स) परीक्षण तकनीक

(द) समाजमितीय तकनीक

(प) प्रक्षेपीय तकनीक

अवलोकन तकनीक से अभिप्राय किसी व्यक्ति के व्यवहार को देखकर या अवलोकित करके उसके व्यवहार का मापन करने की प्राविधि से है। स्व-आख्या तकनीक में मापे जा रहे व्यक्ति से ही उसके व्यवहार के संबंध में जानकारी पूछी जाती है। दूसरे शब्दों में कहा जा सकता है कि व्यक्ति अपने बारे में स्वयं ही सूचना देता है जिसके

आधार पर उसके गुणों को अभिव्यक्त किया जाता है। परीक्षण तकनीक में व्यक्ति को किन्हीं ऐसी परिस्थिति में रखा जाता है, जो उसके वास्तविक व्यवहार व गुणों को प्रकट कर दे। मापनकर्ता व्यक्ति के सम्मुख कुछ परिस्थितियां या समस्याएं रखता है तथा उन पर व्यक्ति द्वारा की गई प्रतिक्रिया के आधार पर उसके गुणों की मात्रा का निर्धारण करता है। समाजमिति तकनीक सामाजिक संबंधों, समायोजन व अंत:क्रिया के मापन में काम आती है। सामाजिक गतिशीलता के मापन के लिए यह सर्वोत्तम तकनीक है। प्रक्षेपीय तकनीक में व्यक्ति के सम्मुख किसी असंरचित उद्दीपन को प्रस्तुत किया जाता है तथा व्यक्ति उस पर अपनी प्रतिक्रिया देता है, जिनका विश्लेषण करके व्यक्ति के गुणों को जाना जा सकता है।

5.4.2 मापन व मूल्यांकन के उपकरण

(क) अवलोकन
(ख) परीक्षण
(ग) साक्षात्कार
(घ) अनुसूची
(च) प्रश्नावली
(छ) निर्धारण मापनी
(ज) प्रक्षेपीय तकनीक
(झ) समाजमिति
(प) संचयी अभिलेख
(फ) ऐनकडोटल अभिलेख
(ब) परीक्षण बैटरी

अवलोकन- अवलोकन में किसी व्यक्ति या विद्यार्थी के बाहा व्यवहार को देखकर उसके व्यवहार का वर्णन किया जाता है। अवलोकन को मापन की वस्तुनिष्ठ विधि के रूप में स्वीकार नही किया जाता है, फिर भी अवलोकन की सहायता से ज्ञानात्मक, भावात्मक तथा क्रियात्मक तीनों ही प्रकार के व्यवहारों का मापन किया जा सकता है। अवलोकन करने वाले की दृष्टि से अवलोकन कई प्रकार के हो सकते है-

- ✓ स्वअवलोकन तथा बाह्य अवलोकन
- ✓ नियोजित तथा अनियोजित अवलोकन
- ✓ सहभागी तथा असहभागी अवलोकन
- ✓ नियंत्रित तथा अनियंत्रित अवलोकन

परीक्षण: परीक्षण वे उपकरण हैं, जो किसी व्यक्ति अथवा व्यक्तियों के किसी समूह के व्यवहार का क्रमबद्ध तथा व्यवस्थित ज्ञान प्रदान करते है। परीक्षण से तात्पर्य किसी व्यक्ति को ऐसी परिस्थितियों में रखने से है, जो उसके वास्तविक गुणों को प्रकट कर दे।

परीक्षण भी कई प्रकार के हो सकते हैं-

- ❖ परीक्षण की प्रकृति के आधार पर- मौखिक, लिखित तथा प्रयोगात्मक परीक्षण

- ❖ परीक्षण के प्रशासन के आधार पर- व्यक्तिगत तथा सामूहिक परीक्षण
- ❖ परीक्षण में प्रयुक्त सामग्री के आधार पर- शाब्दिक तथा अशाब्दिक परीक्षण
- ❖ परीक्षण की रचना के आधार पर- प्रमापीकृत परीक्षण तथा अप्रमापीकृत परीक्षण

साक्षात्कार: साक्षात्कार में किसी व्यक्ति से आमने-सामने बैठकर विभिन्न प्रश्न पूछे जाते है तथा उनके द्वारा दिये गए उत्तर के आधार पर उसकी योग्यता का मापन किया जाता है। शिक्षा संस्थाओं में छात्रों की शैक्षिक उपलब्धि को मापन करने के लिए लिए जाने वाले साक्षात्कार को मौखिकी के नाम से पुकारा जाता है। साक्षात्कार भी कई प्रकार के हो सकते है-

- ✓ प्रमापीकृत तथा अप्रमापीकृत साक्षात्कार
- ✓ संरचित तथा असंरचित साक्षात्कार
- ✓ औपचारिक तथा अनौपचारिक साक्षात्कार
- ✓ व्यक्तिगत तथा सामूहिक साक्षात्कार

अनुसूची- अनुसूची में मापनकर्ता उत्तरदाता से प्रश्न पूछता है, आवश्यकता होने पर प्रश्न को स्पष्ट करता है तथा प्राप्त उत्तरों को अनुसूची में अंकित करता जाता है। बेबस्टर के अनुसार, अनुसूची एक औपचारिक सूची अथवा सूचनाओं की सूची होती है। अनुसूचियाँ अनेक प्रकार की हो सकती हैं-
अवलोकन अनुसूची, साक्षात्कार अनुसूची, दस्तावेज अनुसूची, मूल्यांकन अनुसूची, निर्धारण अनुसूची आदि।

प्रश्नावली- प्रश्नावली प्रश्नों का एक समूह होता है, जिसे उत्तरदाता के सम्मुख प्रस्तुत किया जाता है तथा वह उनका उत्तर देता है। प्रश्नावली प्रमापीकृत साक्षात्कार का लिखित रूप है। प्रश्नावली एक साथ अनेक व्यक्तियों को दी जा सकती है, जिससे कम समय, कम व्यय तथा कम श्रम में अनेक व्यक्तियों से प्रश्नों का उत्तर प्राप्त हो जाता है।

उत्तर प्रदान करने के आधार पर प्रश्नावली दो प्रकार के हो सकते है- प्रतिबन्धित प्रश्नावली तथा मुक्त प्रश्नावली।

निर्धारण मापनी- निर्धारण मापनी किसी व्यक्ति के गुणों का गुणात्मक विवरण प्रस्तुत करती है। निर्धारण मापनी की सहायता से व्यक्ति में उपस्थित गुणों की सीमा अथवा गहनता या आवृत्ति को मापने का प्रयास किया जाता है। निर्धारण मापनी भी कई प्रकार के हो सकते हैं- चैकलिस्ट, आंकिक मापनी, ग्राफिक मापनी, क्रमिक मापनी, स्थानिक मापनी तथा बाह्य चयन मापनी।

प्रक्षेपीय तकनीक- प्रक्षेपीय तकनीक की सर्वाधिक महत्वपूर्ण विशेषता व्यक्ति के अचेतन पक्ष का मापन है। प्रक्षेपण से अभिप्राय उस अचेतन प्रक्रिया से है जिसमें व्यक्ति अपने मूल्यों, दृष्टिकोणों, आवश्यकताओं, इच्छाओं, संवेगों आदि को अन्य वस्तुओं अथवा अन्य व्यक्तियों के माध्यम से अपरोक्ष ढंग से व्यक्त करता है। प्रक्षेपीय तकनीकों में व्यक्ति द्वारा दी जाने वाली प्रतिक्रिया के आधार पर इन्हें पांच भागों- साहचर्य तकनीकें, रचना तकनीकें, पूर्ति तकनीकें, क्रम तकनीकें तथा अभिव्यक्त तकनीकें में बाँटा जा सकता है।

समाजमिति- समाजमिति एक ऐसा व्यापक पद है जो किसी समूह में व्यक्ति की पसंद, अंत:क्रिया, आदि एवं समूह के गठन आदि का मापन करने वाले उपकरणों के लिए प्रयोग में लाया जाता है। दूसरे शब्दों में समाजमिति सामाजिक पसंद तथा समूहगत विशेषताओं के मापन की एक विधि है। समाजमितीय प्रश्नों के लिए प्राप्त उत्तरों से

तीन प्रकार का समाजमितीय विश्लेषण समाजमितीय मैट्रिक्स, सोशिओग्राम तथा समाजमितीय गुणांक किया जा सकता है।

संचयी अभिलेख – विद्यालयों में प्राय: छात्रों से संबंधित विभिन्न सूचनाओं को क्रमबद्ध रूप से एकत्रित किया जाता है। इन्हें संचयी अभिलेख के नाम से पुकारा जाता है। इनमें छात्रों की उपस्थिति, शैक्षिक प्रगति, योग्यता, प्रयोगात्मक कार्य, पाठ्यसामग्री क्रियाओं में सहभागिता, उनकी रुचियाँ, व्यक्तित्व आदि सूचनाओं का विस्तृत आलेख प्रस्तुत किया जाता है।किसी छात्र की प्रगति को जानने तथा उसका मूल्यांकन करने में ये संचयी अभिलेख अत्यधिक उपयोगी सिद्ध होते हैं।

ऐनकडोटल अभिलेख- ऐनकडोटल अभिलेख वास्तव में छात्रों के शैक्षिक विकास से संबंधित महत्वपूर्ण एवं सार्थक घटनाओं का वस्तुनिष्ठ प्रस्तुतीकरण है। ये घटनाएं अनौपचारिक या औपचारिक दोनों ही ढंग की हो सकती है।

परीक्षण बैटरी- परीक्षण बैटरी वास्तव में कुछ संबंधित परीक्षणों अथवा उप-परीक्षणों का एक निर्देशित समूह होता है। परीक्षण बैटरी में सम्मिलित परीक्षणों या उप-परीक्षणों की संख्या कुछ भी हो सकती है। परीक्षण बैटरी किसी गुण या विशेषता, जैसे शैक्षिक संप्राप्ति, बुद्धि, व्यक्तित्व, रुचि, आदि के मापन के लिए एक व्यापक आधार का प्रयोग करती है। परीक्षण बैटरी की सहायता से अनेक छात्रों की परस्पर तुलना भी अधिक अच्छी तरह से की जा सकती हैं।

अपनी प्रगति की जाँच करें

1. मापन एवं मूल्यांकन की अवधारणा को स्पष्ट करें।

.....

.....

2. मापन एवं मूल्यांकन उपकरण की आवश्यकता पर प्रकाश डालें।

.....

.....

5.5 नैदानिक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण

शाब्दिक रूप से नैदानिक परीक्षण का अर्थ होता है एक ऐसा परीक्षण या मूल्यांकन कार्यक्रम, जिसे किसी प्रकार के निदान हेतु प्रयुक्त किया जाता है। इस रूप में अगर यही बात गणित शिक्षण के लिए सोची जाए, तो नैदानिक परीक्षण की जरुरत तभी पड़ेगी, जबकि किसी विद्यार्थी विशेष द्वारा गणित को सीखने में कोई परेशानी अनुभव होगी अथवा असफलता का सामना करना पड़ेगा। उस अवस्था में हम यह सोचने को मजबूर होंगे कि किस वजह से यह विद्यार्थी गणित में बार-बार फेल हो रहा है? इस रूप में अगर विचार किया जाए तो गणित में प्रयुक्त नैदानिक परीक्षणों से तात्पर्य एक ऐसे परीक्षण तथा मूल्यांकन कार्यक्रम से है, जिसे गणित अध्यापक द्वारा किसी विद्यार्थी विशेष या समूह विशेष के विद्यार्थियों की अधिगम संबंधी कठिनाई तथा व्यवहारगत समस्याओं की वास्तविक प्रकृति तथा उसके पीछे छिपे हुए कारणों का पता लगाने और फिर उनके

जरिए एक ऐसा उपचारात्मक कार्यक्रम तैयार करने के लिए काम में लाया जाता है, जिससे उन्हें उन कठिनाइयों तथा समस्याओं से मुक्ति होने में उचित सहायता की जा सके।

उपरोक्त विवरण के द्वारा यह अच्छी तरह स्पष्ट हो सकता है कि नैदानिक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण दोनों ही एक-दूसरे पर आश्रित, एक-दूसरे के पूरक तथा अंत:संबंधित है। उपचार ठीक से हो यही करने के लिए सही निदान की जरूरत पड़ती है। वास्तव में देखा जाए तो न तो नैदानिक परीक्षणों को और न उपचारात्मक शिक्षण को किसी भी अवस्था में उनके अकेले रूप में संपादित करने से कोई फायदा है। इन्हें सदैव ही इकट्ठे रूप में उपयोग में लाना चाहिए और दोनों को ही एक संयुक्त प्रणाली का जिसे नैदानिक परीक्षण एवं उपचारात्मक शिक्षण चक्र कहा जाता है। इस चक्र में उसके उचित क्रियान्वयन हेतु निम्न प्रक्रियाओं की उपस्थिति पाई जाती है।

(अ) नैदानिक परीक्षण (ब) कारणों से संबंधित परिकल्पनाओं का विकास (ग) उपचारात्मक शिक्षण (घ) उपचार का मूल्यांकन (च) उपरोक्त सभी प्रक्रियाओं की पुनरावृत्ति।

उपचारात्मक शिक्षण एक ऐसा शिक्षण या अनुदेशन कार्य है जिसे ।विशेष या विद्यार्थियों के समूह विशेष की उन सामान्य या विशिष्ट अधिगम कमजोरियों तथा कठिनाइयों का निवारण करने हेतु हाथ में लिया जाता है जिनका निदान किसी नैदानिक परीक्षण के लिए प्रयुक्त किसी अन्य मापन साधन से किया गया हो।

इस तरह विद्यार्थी विशेष या कक्षा के विद्यार्थियों की किसी विषय, इकाई या प्रकरण विशेष में अनुभव की जाने वाली सामान्य या विशिष्ट अधिगम कठिनाइयों एवं कमजोरियों के निदान द्वारा ही उनके निवारण हेतु किसी उपचारात्मक शिक्षण योजना के निर्माण का कार्य प्रारंभ होता है।

5.6 व्यक्तिनिष्ठ और वस्तुनिष्ठ परीक्षण

शिक्षा एक सोद्देश्य प्रक्रिया है। शिक्षा प्रक्रिया के द्वारा छात्रों के व्यवहार में कुछ पूर्वनिर्धारित संशोधन करने का प्रयास किया जाता है।शिक्षा प्रक्रिया में संलग्न व्यक्ति विभिन्न स्तरों के छात्रों के लिए शिक्षण उद्देश्य निर्धारित करते है तथा इन उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए शिक्षण-अधिगम क्रियाओं का आयोजन करते हैं। शैक्षिक संप्राप्ति से तात्पर्य इन शिक्षण उद्देश्यों की प्राप्ति से है। शैक्षिक संप्राप्ति का मापन करने के लिए विभिन्न प्रकार के परीक्षणों का प्रयोग किया जाता है।

व्यक्तिनिष्ठ परीक्षण प्राचीन काल से ही अत्यंत प्रचलित है। वर्तमान शताब्दी के प्रारंभ होने तक ये लिखित परीक्षाएं लेने का एकमात्र ढंग था। व्यक्तिनिष्ठ परीक्षण को निबंधात्मक परीक्षण या परम्परागत परीक्षण भी कहते है।प्रश्न निर्माता निबंधात्मक प्रश्नों को अत्यंत सरलता व शीघ्रता से तैयार कर लेते है।इस प्रकार के परीक्षण में तैयार प्रश्नों में छात्रों से एक विस्तृत उत्तर प्रस्तुत करने की अपेक्षा की जाती है तथा किसी मानक उत्तर से तुलना किये बिना ही परीक्षक छात्रों के द्वारा दिये गए उत्तरों का अंकन कर लेता है। व्यक्तिनिष्ठ परीक्षण में अनेक प्रकार के प्रश्नों को सम्मिलित किया जा सकता है-

वर्णनात्मक प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में छात्रों से किसी घटना, वस्तु, प्रक्रिया, सिद्धांत, परिभाषा, सूत्र आदि का वर्णन करने के लिए कहा जाता है।

व्याख्यात्मक प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में छात्रों को किसी संबंध या कारण व प्रभाव की तार्किक व्याख्या करने के लिए कहा जाता है।

विवेचनात्मक प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में किसी स्थिति के पक्ष तथा विपक्ष में तर्क देते हुए किसी एक निष्कर्ष पर पहुंचा जाता है।

उदाहरणार्थ प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में छात्रों से अपेक्षा की जाती है कि वे उदाहरणों तथा दृष्टांतों की सहायता से अपनी बात को स्पष्ट करें।

तुलनात्मक प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में छात्रों को किन्हीं दो वस्तुओं, विचारों, सिद्धांतों आदि में समानता व असमानता तथा गुण व दोषों के आधार पर तुलना करनी होती है।

आलोचनात्मक प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में छात्रों को किसी विचारों या पक्ष की आलोचना करनी होती है, जिससे उसकी शुद्धता, पर्याप्तता, सत्यता, दृढ़ता आदि का मूल्यांकन हो सके।

विश्लेषणात्मक प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में छात्रों को किसी तथ्य के विभिन्न पक्षों को स्पष्ट करते हुए उसका वर्णन एवं परस्पर संबंध को स्पष्ट करना होता है।

व्यक्तिनिष्ठ परीक्षणों की सीमायें

1) व्यक्तिनिष्ठ परीक्षणों में संपूर्ण पाठ्यक्रम तथा शिक्षण उद्देश्यों से अपेक्षाकृत कम संख्या में प्रश्नों का चयन किया जाता है, जिससे विस्तृत पाठ्यक्रम तथा शिक्षण उद्देश्य का उचित प्रतिनिधित्व नहीं हो पाता है। इससे छात्रों के द्वारा चयनित अध्ययन तथा रटन्त स्मरण पर बल दिया जाता है।
2) व्यक्तिनिष्ठ परीक्षणों में न केवल परीक्षार्थी को उत्तर देने में, बल्कि परीक्षक को भी अंक देने में अत्यधिक छुट रहती है।
3) व्यक्तिनिष्ठ परीक्षण के उत्तर देने में छात्रों को तथा उनका अंकन करने में परीक्षकों को अधिक समय की आवश्यकता होती है।
4) व्यक्तिनिष्ठ परीक्षण के अंकन में त्रुटि होने की संभावना अधिक रहती है।
5) व्यक्तिनिष्ठ प्रश्नों की विश्वसनीयता तथा वैधता अपेक्षाकृत कम होती है।
6) निबंधात्मक परीक्षणों की प्रकृति के चयनात्मक होने तथा संयोग व भाग्य से प्रभावित होने ने शिक्षा प्रणाली को बोझिल बना दिया है।

वस्तुनिष्ठ परीक्षण- वस्तुनिष्ठ परीक्षण का प्रयोग बीसवीं शताब्दी में आरंभ हुआ, इसलिए इन्हें नवीन प्रकार की परीक्षा भी कहा जाता है। ये परीक्षण तकनीकी दृष्टि से व्यक्तिनिष्ठ परीक्षण की अपेक्षा अधिक विश्वसनीय व वैध होते है। वस्तुनिष्ठ प्रश्नों में प्रत्येक प्रश्न का एक निश्चित सही उत्तर होता है तथा परीक्षार्थी से उसी उत्तर की अपेक्षा की जाती है, अत:किसी वस्तुनिष्ठ प्रश्न पर किसी छात्र द्वारा दिया गया उत्तर या तो सही होगा अथवा गलत होगा।इस प्रकार के परीक्षणों का अंकन करते समय परीक्षक को किसी प्रकार की स्वतंत्रता अथवा व्यक्तिगत निर्णय लेने की छूट नहीं होती है, चाहे कोई भी व्यक्ति अंकन करे किसी छात्र द्वारा प्राप्त अंक वही रहेंगे।

वस्तुनिष्ठ परीक्षण के लाभ

क) वस्तुनिष्ठ परीक्षणों में प्रश्नों की संख्या अधिक होती है, जिसके कारण इनमें संपूर्ण पाठ्यवस्तु तथा शिक्षण उद्देश्यों का उचित प्रतिनिधित्व संभव होता है।

ख) वस्तुनिष्ठ परीक्षणों में प्रश्न स्पष्ट होते है, जिससे परीक्षार्थी को उत्तर देने में तथा परीक्षक को अंकन करने में सुगमता होती है।

ग) वस्तुनिष्ठ परीक्षणों का अंकन सरलता, शीघ्रता तथा त्रुटि रहित ढंग से संभव होता है।

घ) वस्तुनिष्ठ परीक्षण व्यक्तिनिष्ठ परीक्षणों की तुलना में अधिक विश्वसनीय तथा वैध होते है।

च) वस्तुनिष्ठ परीक्षण में सम्मिलित प्रश्नों की रचना भली-भाँति ढंग से करने पर इनकी सहायता से उच्च मानसिक योग्यताओं का मापन भी किया जा सकता है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के प्रकार

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को दो मुख्य प्रकार में विभक्त किया जा सकता है-

(1) आपूर्ति प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में परीक्षार्थी को उत्तर की पूर्ति करनी होती है। आपूर्ति प्रश्न दो प्रकार के हो सकते है- (क) प्रत्यास्मरण प्रश्न (ख) रिक्त स्थान पूर्ति प्रश्न

(2) चयन प्रश्न- इस प्रकार के प्रश्नों में प्रश्न के अनेक संभावित उत्तर दिए जाते हैं तथा छात्रों से सही उत्तर चयन करने के लिए कहा जाता है। चयन प्रश्न निम्न प्रकार के होते है- (क) सत्यासत्य प्रश्न (ख) बहु विकल्पीय प्रश्न (ग) मिलान प्रश्न (घ) वर्गीकरण प्रश्न

अपनी प्रगति की जाँच करें

3. नैदानिक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण की आवश्यकता को स्पष्ट करें।

.....

.....

5.7.0 संरचनात्मक और योगात्मक मूल्यांकन

संरचनात्मक मूल्यांकन से अभिप्राय किसी ऐसे शैक्षिक कार्यक्रम, योजना प्रक्रिया अथवा सामग्री आदि के मूल्यांकन से है, जिसमें मूल्यांकन के आधार पर सुधार करना संभव हो। स्पष्ट है कि संरचनात्मक मूल्यांकन में किसी निर्माणाधीन कार्यक्रम, योजना, प्रक्रिया या सामग्री को अंतिम रूप देने से पूर्व उसके प्रारंभिक प्रारूप का मूल्यांकन किया जाता है, जिससे उसकी संरचना गत कमियों को दूर किया जा सके। जैसे- यदि नवीन शिक्षण विधि, दूरदर्शन पाठ, पाठ्यक्रम, सहायक सामग्री आदि में संशोधन व सुधार करने की दृष्टि से इनका मूल्यांकन किया जाता है तो इसे संरचनात्मक मूल्यांकन कहेंगे। अत: संरचनात्मक मूल्यांकनकर्ता के कार्य को तीन भागों में बाँटा जा सकता है। ये तीन कार्य- प्रथम, शैक्षिक कार्यक्रम या सामग्री के विभिन्न अंगों के गुण व दोषों के संबंध में स्पष्ट प्रमाण एकत्रित करना, द्वितीय इन प्रमाणों के आधार पर कार्यक्रम या सामग्री की कमियों को सम्मुख रखना तथा तृतीय, इन कमियों को दूर करके कार्यक्रम या सामग्री को अधिक प्रभावपूर्ण बनाने के लिए सुझाव प्रस्तुत करना है।

योगात्मक मूल्यांकन

योगात्मक मूल्यांकन से अभिप्राय किसी पूर्वनिर्मित शैक्षिक कार्यक्रम, योजना या सामग्री की समग्र वांछनीयता को ज्ञात करने की प्रक्रिया से है। दूसरे शब्दों में, योगात्मक मूल्यांकनकर्ता किसी शैक्षिक कार्यक्रम, योजना, सामग्री को स्वीकार करने या भविष्य में जारी रखने के संबंध में निर्णय लिया जा सके। उदाहरण के लिए- यदि

माध्यमिक शिक्षा परिषद् इन्टर कक्षा के लिए किसी गणित की एक पाठ्यपुस्तक का चयन करने के लिए, विभिन्न प्रकाशकों द्वारा प्रकाशित तथा बाजार में उपलब्ध गणित की अनेक पाठ्यपुस्तकों का मूल्यांकन कराती है, तो इस प्रकार के मूल्यांकन को योगात्मक मूल्यांकन कहा जाएगा।

संरचनात्मक तथा योगात्मक मूल्यांकन की तुलना

जब कोई अध्यापक या अन्य कोई मूल्यांकनकर्ता पाठ्यक्रम की समाप्ति पर या शैक्षिक कार्यक्रम के अंत में या शिक्षा सत्र के समापन पर छात्रों की उपलब्धि का मूल्यांकन करता है तो इस प्रकार के मूल्यांकन को योगात्मक मूल्यांकन कहा जाएगा इसके विपरीत यदि शैक्षिक कार्यक्रम के दौरान या शिक्षा सत्र के बीच में समय-समय पर छात्रों की उपलब्धि का मूल्यांकन किया जाता है तो इस प्रकार के मूल्यांकन को संरचनात्मक मूल्यांकन कहा जाएगा क्योंकि इस मूल्यांकन का उद्देश्य छात्रों द्वारा अर्जित संप्राप्ति का आंकलन करके उसमें आवश्यक सुधार करना है।

संरचनात्मक मूल्यांकन अल्पकालीन निर्णयों के लेने में अधिक सहायक होता है, जबकि योगात्मक मूल्यांकन दीर्घकालीन निर्णयों के लेने में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है।

5.8 सतत और व्यापक मूल्यांकन

सतत एवं व्यापक मूल्यांकन का आशय विद्यार्थियों के विद्यालय-आधारित मूल्यांकन की उस प्रणाली के बारे में है, जिसमें विद्यार्थिओं के विकास के सभी पहलुओं की ओर ध्यान दिया जाता है ।

यह निर्धारण की विकासात्मक प्रक्रिया है, जो दोहरे उद्देश्यों पर बल देती है। ये लक्ष्य है, व्यापक आधार वाली शिक्षा-प्राप्ति का मूल्यांकन और दूसरी ओर आचरणात्मक परिणामों का मूल्यांकन और निर्धारण।

यहाँ 'सतत' शब्द का उद्देश्य इस बात पर बल देना है कि बच्चों की 'संवृद्धि और विकास' के अभिज्ञात पहलुओं का मूल्यांकन एक घटना होने की बजाए एक सतत प्रक्रिया है, जो अध्यापन-शिक्षा-प्राप्ति की संपूर्ण प्रक्रिया के अंदर निर्मित है और शैक्षिक सत्र की समूची अवधि में फैली होती है। इसका अर्थ है कि नियमितता, यूनिट परीक्षण की आवृति, शिक्षा-प्राप्ति की कमियों का निदान, सुधारात्मक उपायों का उपयोग, पुन: परीक्षण और अध्यापकों और छात्रों के स्व-मूल्यांकन के लिए उन्हें घटनाओं के प्रमाण का फीडबैक।

'व्यापक' का अर्थ है कि यह योजना विद्यार्थियों की संवृद्धि और विकास के शैक्षिक और सह-शैक्षिक दोनों क्षेत्रों को समाहित करने का प्रयास करती है। चूँकि योग्यताएं, अभिवृतियाँ और अभिरुचियाँ अपने आपको लिखित शब्दों से भिन्न अन्य रूपों में प्रकट करती है, इसलिए इस शब्द में विभिन्न प्रकार के साधनों और तकनीकों (परीक्षण और गैर-परीक्षण दोनों) के उपयोग और शिक्षा-प्राप्ति के क्षेत्रों में शिक्षार्थियों के विकास को आंकने के लक्ष्यों का उल्लेख किया गया है, जैसे: ज्ञान, समझना/बोध, अनुप्रयोग, विश्लेषण, मूल्यांकन, सृजन।

यह योजना एक पाठ्यचर्या संबंधी पहल है, जिसमें परीक्षण के स्थान पर संपूर्णवादी शिक्षा-प्राप्ति पर जोर दिए जाने का प्रयास किया गया है। इसका लक्ष्य अच्छे स्वास्थ्य, उपयुक्त कौशलों और वांछनीय गुणवत्ता वाले और इसके आलावा शैक्षिक उत्कृष्टता वाले अच्छे नागरिकों का निर्माण करना है।

सतत एवं व्यापक मूल्यांकन के उद्देश्य है:

- संज्ञानात्मक, मनोप्रेरक(साइकोमोटर) और प्रभावकारी कौशलों का विकास करने में सहायता देना।
- चिंतन की प्रक्रिया पर जोर देना और कंठस्थ करने पर बल न देना।
- मूल्यांकन को अध्यापन-शिक्षाप्राप्ति की प्रक्रिया का अभिन्न अंग बनाना।
- मूल्यांकन का उपयोग नियमित निदान और उसके बाद उपचारात्मक अनुदेश के आधार पर विद्यार्थियों की उपलब्धियों और अध्यापन-शिक्षाप्राप्ति की कार्यनीतियों में सुधार करने के लिए करना।
- कार्य-निष्पादन का वांछित स्तर बनाये रखने के लिए मूल्यांकन का उपयोग एक गुणवत्ता नियंत्रण साधन के रूप में करना।
- किसी कार्यक्रम की सामाजिक उपयोगिता, वांछनीयता अथवा प्रभावकारिता निर्धारित करना और शिक्षार्थी, शिक्षा-प्राप्ति की प्रक्रिया और शिक्षा-प्राप्ति के वातावरण के बारे में उपयुक्त निर्णय लेना।
- अध्यापक और शिक्षा-प्राप्ति की प्रक्रिया को शिक्षार्थी-केंद्रित क्रियाकलाप बनना।

मूल्यांकन की प्रक्रिया में, निम्नलिखित कार्य न करने का ध्यान रखना:

- शिक्षार्थियों को मंद, कमजोर, बुद्धिमान आदि के रूप में वर्गीकृत करना।
- उनके बीच तुलना करना।
- नकारात्मक बयान देना।

शिक्षा-प्राप्ति के प्रत्येक भाग में तीन भाग शामिल होने चाहिए: शिक्षा प्राप्ति की प्रक्रिया, जो सीखा गया है,उसका अनुप्रयोग, और जो सीखा गया है, उसका मूल्यांकन।

संरचनात्मक और योगात्मक निर्धारण

संरचनात्मक निर्धारण की कुछ मुख्य विशेषताएँ:

- यह नैदानिक और उपचारात्मक है।
- प्रभावकारी फीडबैक की व्यवस्था करता है।
- विद्यार्थियों को स्वयं अपनी शिक्षा-प्राप्ति में सक्रिय रूप से शामिल होने के लिए मंच उपलब्ध कराता है।
- अध्यापकों को निर्धारण के परिणामों को ध्यान में रखने के लिए अध्यापन को समायोजित करने में सामर्थ बनाता है।
- निर्धारण का विद्यार्थियों के अभिप्रेरण और आत्म-सम्मान पर जो गहरा प्रभाव पड़ता है, उसे स्वीकार करना, अभिप्रेरणा और आत्म-सम्मान दोनों का शिक्षा-प्राप्ति पर निर्णायक प्रभाव पड़ता है।
- यह इस बात की आवयश्कता को स्वीकार करता है कि विद्यार्थियों को अपना स्व-मूल्यांकन करने और यह समझने में सामर्थ्य होना चाहिए की सुधार कैसे किया जाए।

- जो सिखाया जाता है, उसका अभिकल्प (डिजाइन) विद्यार्थियों के पहले के ज्ञान और अनुभव के आधार पर तैयार करना।
- क्या पढ़ाया जाए और कैसे पढ़ाया जाए, इसका फैसला करने में शिक्षा-प्राप्ति की विविध शैलियों को शामिल करना।
- विद्यार्थियों को उन मानदंडों को समझने के लिए प्रोत्साहित करता है, जिनका उपयोग उनके कार्य को परखने के लिए किया जाएगा।
- विद्यार्थियों को फीडबैक के बाद अपने कार्य में सुधार करने का अवसर प्रदान करता है।
- विद्यार्थियों को अपने समकक्ष विद्यार्थियों का समर्थन करने और उनके द्वारा समर्थन दिए जाने की अपेक्षा करने में सहायता देता है।

इस प्रकार, संरचनात्मक निर्धारण कार्य-संपादक अथवा शिक्षा प्रदान करने की प्रक्रियाओं और शिक्षा-प्राप्ति के क्रियाकलापों में उपयुक्त संशोधन करने के बारे में निर्णय लेने के लिए अध्यापकों और विद्यार्थियों दोनों को निरंतर फीडबैक मुहैया करने के लिए शिक्षा की अवधि के दौरान किया जाता है।

योगात्मक निर्धारण शिक्षा पाठ्यक्रम के समाप्त होने पर किया जाता है। यह मापता है अथवा जोड़ता है कि विद्यार्थियों ने पाठ्यक्रम से क्या सीखा है। यह आमतौर पर एक श्रेणीकृत(ग्रेडेड) परीक्षण होता है, अर्थात् इसमें एक पैमाने के अनुसार अथवा ग्रेडों के एक सेट अनुसार अंक दिए जाते है।

योगात्मक निर्धारण अधिक से अधिक एक समय-विशेष पर उपलब्धि के स्तर को प्रमाणित करता है।

सतत और व्यापक मूल्यांकन की विशेषताएँ

सतत और व्यापक मूल्यांकन के 'सतत' पहलू के अंतर्गत मूल्यांकन के 'सतत' और 'आवधिक' पहलू का ध्यान रखा जाता है।

निरंतरता का अर्थ है शिक्षा के प्रारंभ में विद्यार्थियों का निर्धारण (स्थापन मूल्यांकन) और शिक्षण प्रक्रिया के दौरान निर्धारण (संरचनात्मक मूल्यांकन), जो मूल्यांकन की बहुविध तकनीकों का उपयोग करके, अनौपचारिक रूप से किया जाता है। नियतकालिकता का अर्थ है कार्य-निष्पादन का निर्धारण, जो यूनिट/अवधि के समाप्त होने पर बार-बार किया जाता है (योगात्मक)। सतत और व्यापक मूल्यांकन का 'व्यापक' संघटक बच्चे के व्यक्तित्व के सर्वतोमुखी विकास के निर्धारण का ध्यान रखा जाता है। इसमें विद्यार्थियों के विकास के शैक्षिक और इसके अलावा सह-शैक्षिक पहलुओं का निर्धारण शामिल है। शैक्षिक पहलुओं में पाठ्यक्रम के क्षेत्र अथवा विषय-सापेक्ष क्षेत्र शामिल होते है, जबकि सह-शैक्षिक पहलुओं में जीवन-कौशल, सह-पाठ्यचर्या अभिवृतियां और मूल्य शामिल होते है। शैक्षिक क्षेत्रों में निर्धारण, निरंतर और नियतकालिक रूप से मूल्यांकन की बहुविध तकनीकों का इस्तेमाल करके अनौपचारिक और औपचारिक रूप से किया जाता है। नैदानिक मूल्यांकन यूनिट/परीक्षा के समाप्त होने पर किया जाता है। कुछ यूनिटों में घटिया कार्य-निष्पादन के कारणों का पता नैदानिक परीक्षणों का उपयोग करते हुए लगाया जाता है। उसके बाद उपयुक्त रूप से हस्तक्षेप किया जाता है और कार्रवाई की जाती है और तत्पश्चात पुन: परीक्षण किए जाते है। सह-शैक्षिक क्षेत्रों में निर्धारण निर्धारित मानदंडों के आधार

पर बहुविध तकनीकों का इस्तेमाल करते हुए किया जाता है,जब जीवन-कौशलो का निर्धारण के सूचकों और जांच-सूचियों के आधार पर किया जाता है।

केंद्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड (CBSE) के किसी भी संबद्ध विद्यालय में वर्ष 2011 से सतत एवं व्यापक मूल्यांकन का प्रमाणपत्र दिया जा रहा है। सीबीएसई के द्वारा मूल्यांकन के लिए दो अवधियों (टर्म्स) का सुझाव दिया गया है, पहली अवधि अप्रैल से सितंबर तक और दूसरी अवधि अक्टूबर से मार्च तक की होगा। प्रत्येक अवधि के लिए दो संरचनात्मक और एक योगात्मक मूल्यांकन होंगें। शैक्षिक क्षेत्र का ग्रेडिंग पैमाना प्रत्यक्ष ग्रेडिंग पर आधारित एक नौ-सूत्री पैमाना है।

शिक्षा का मुख्य उद्देश्य 'बोझ के बिना सीखना' माना गया है। सतत एवं व्यापक मूल्यांकन शिक्षा-प्राप्ति के निदान, उपचार और उसकी वृद्धि की ओर ले जाएगा।

अपनी प्रगति की जाँच करें

4. सतत एवं व्यापक मूल्यांकन के उद्देश्य को बताएँ।

.....

.....

5. संरचनात्मक और योगात्मक मूल्यांकन से आप क्या समझते हैं?

.....

.....

5.9.0 निकष संदर्भित तथा मानक संदर्भित मूल्यांकन

निकष संदर्भित मापन की आवश्यकता सबसे पहले 1963 में रॉबर्ट ग्लेजर ने महसूस की। ग्लेजर के द्वारा American Psychologist (1963, 18, 519-21) में प्रकाशित लेख "Instructional Technology and the Measurement of Learning Outcomes : Some Questions" ने अनेक शिक्षाशास्त्रियों तथा मनोवैज्ञानिकों का ध्यान उन कमियों की ओर आकर्षित किया जो परंपरागत मापन के प्रत्ययों को नवीन अभिक्रमित अनुदेशन तकनीकों से संबंधित परिस्थितियों में लागू करने से हो रही थी। मानक संदर्भित मापन की सहायता से किसी छात्र की अन्य छात्रों के सापेक्षिक स्थिति ज्ञात की जाती है, जबकि निकष संदर्भित मापन में छात्र के द्वारा अर्जित ज्ञान की निरपेक्ष स्थिति का वर्णन किया जाता है। मानक संदर्भित परीक्षण छात्रों की योग्यता को किसी मानक समूह के संदर्भ में व्यक्त करते है, जबकि निकष संदर्भित परीक्षण में किसी व्यक्ति की योग्यता को निकष के संदर्भ में स्पष्ट किया जाता है। प्राय: निकष शब्द के तीन अर्थ लगाये जाते हैं- अ) शैक्षिक उद्देश्य ब) छात्रों की योग्यता का वांछित स्तर तथा स) सुपरिभाषित व्यवहारों का समूह।

मानक संदर्भित तथा निकष-संदर्भित परीक्षणों की तुलना

बिंदु	मानक-संदर्भित परीक्षण	निकष-संदर्भित परीक्षण
1. उद्देश्य	छात्रों की संप्राप्ति का मापन करना तथा इसकी तुलना अन्य छात्रों की संप्राप्ति से करना।	छात्रों की संप्राप्ति का मापन करना तथा प्रत्येक छात्र की संप्राप्ति की तुलना किन्हीं विशिष्ट मानदंडो से

		करना।
2. परीक्षण निर्माण का आधार	विषय वस्तु के सामान्य वर्णन पर आधारित	व्यवहार परिवर्तनों के रूप में व्यक्त विशिष्ट उद्देश्यों पर आधारित
3. प्रश्नों का आधार	छात्रों में अधिकतम संभव विभेद करने में समर्थ।	विशिष्ट उद्देश्यों का प्रतिनिधित्व करने तथा किसी विशिष्ट कार्य को करने की क्षमता इंगित करने में समर्थ।
4. प्रश्नों का आधार	सभी प्रकार के प्रश्न	सभी प्रकार के प्रश्न
5. प्रश्नों का कठिनाई स्तर	औसत कठिनाई वाले प्रश्न।	कठिनाई स्तर में अधिक फैलाव।
6.प्रश्नों का चयन	छात्रों से संकलित समंको का उपयोग।	विशेषज्ञों के निर्णयों का उपयोग।

5.10.0 ब्लू-प्रिंट की रचना और गणित में शिक्षक निर्मित उपलब्धि परीक्षण का निर्माण

कक्षा में अध्यापक अपनी कक्षा में छात्रों की शैक्षिक उपलब्धि का मापन तथा मूल्यांकन करने के लिए समय समय पर अनेक प्रकार के परीक्षणों का प्रयोग करता है। परीक्षण निर्माण के आधार पर परीक्षणों को दो भागों- अप्रमापीकृत परीक्षण तथा प्रमापीकृत परीक्षण में विभक्त किया जा सकता है। अप्रमापीकृत परीक्षणों को अध्यापक निर्मित परीक्षण भी कहते है। अध्यापक निर्मित परीक्षण की रचना करते समय यद्यपि किसी औपचारिक प्रक्रिया का अनुसरण नहीं किया जाता है, फिर भी यदि कोई अध्यापक अच्छी तरह से विचार-विमर्श करने के उपरांत परीक्षण की रचना करता है, तो ऐसे अध्यापक निर्मित परीक्षण अत्यंत उपयोगी सिद्ध हो सकती हैं। उपलब्धि परीक्षण के निर्माण तथा प्रमापीकरण की प्रक्रिया को चार मुख्य सोपानों में बाँटा जा सकता है-

(अ) परीक्षण की योजना बनाना

(ब) प्रश्नों की रचना करना

(स) प्रश्नों का चयन करना

(द) परीक्षण का मूल्यांकन करना

परीक्षण की योजना बनाना

योजना बनाना परीक्षण निर्माण का प्रथम सोपान है। इस सोपान में परीक्षण के लिए विषयवस्तु, शिक्षण उद्देश्यों, प्रश्नों के प्रकार, प्रश्नों की संख्या, समयावधि, अंकन विधि, परीक्षण का प्रारूप जैसी विभिन्न बातों को निर्धारित किया जाता है। इसके उपरांत विशिष्टीकरण सारणी (Table of Specifications या Blue-Print) तैयार की जाती है।

सामान्य गणित परीक्षण के लिए विशिष्टीकरण तालिका

विषय – सामान्य गणित

कुल प्रश्न – 100

कक्षा – 8

अवधि – 2 घंटा

उद्देश्य		ज्ञान			बोध			अनुप्रयोग			कुल प्रश्न			कुल
भार		40%			40%			20%			100%			
प्रश्नों का प्रकार		TF	MC	MT	TF	MC	MT	TF	MC	MT	TF	MC	MT	
प्रकरण भार		12%	16%	12%	12%	16%	12%	6%	8%	6%	30%	40%	30%	100%
लाभ-हानि	15%	2	2	2	2	2	2	1	1	1	5	5	5	15
समीकरण	10%	1	2	1	1	2	1	0	1	1	2	5	3	10
साधारण ब्याज	15%	2	2	2	2	2	2	1	1	1	5	5	5	15
बीजगानितीय तादात्मय	10%	1	2	1	1	2	1	1	1	0	3	5	2	10
त्रिभुज	10%	1	2	1	1	2	1	0	1	1	2	5	3	10
सर्वांगसमता	15%	2	2	2	2	2	2	1	1	1	5	5	5	15
समरूपता	10%	1	2	1	1	2	1	1	1	1	3	5	2	10
बहुपद	15%	2	2	2	2	2	2	1	1	1	5	5	5	15
कुल	100%	12	16	12	12	16	12	6	8	6	30	40	30	100

संकेत- TF= सत्य-असत्य, MC= बहुविकल्पीय, MT = मिलान प्रश्न

गणित संप्राप्ति परीक्षण के लिए ब्लू प्रिंट

विषय – सामान्य गणित कुल प्रश्न – 100

कक्षा – 8 अवधि – 2 घंटा

उद्देश्य		ज्ञान			बोध			अनुप्रयोग			कुल प्रश्न			Total
		30%			30%			40%			100%			
		TF	MC	MT	TF	MC	MT	TF	MC	MT	TF	MC	MT	
प्रकरण	भार	5%	15%	10%	5%	15%	10%	10%	20%	10%	20%	50%	30%	100
अंकगणि	30	-	3	2	-	3	2	2	4	2	2	10	6	18

त	%													
बीजगणित	35%	1	3	2	2	3	2	2	4	2	5	10	6	21
रेखागणित	35%	2	3	2	1	3	2	2	4	2	5	10	6	21
योग	100%	3	9	6	3	9	6	6	12	6	12	30	18	60

संकेत- TF= सत्य-असत्य, MC= बहुविकल्पीय, MT = मिलान प्रश्न

प्रश्नों की रचना करना

परीक्षण के द्वितीय सोपान में प्रश्नों का निर्माण किया जाता है तथा उसमें से अच्छे प्रश्नों का चयन किया जाता है। इस सोपान में निर्मित प्रश्नों में सुधार किया जाता है, इसलिए इस सोपान को परीक्षण का जाँच स्तर भी कहा जाता है। परीक्षण के जाँच के दो स्तर होते है- प्रारंभिक जाँच स्तर तथा वास्तविक जाँच स्तर। प्रारंभिक जाँच स्तर में परीक्षण की भाषा संबंधी त्रुटियों व भ्रांतियों को दूर किया जाता है। वास्तविक जाँच स्तर के अंतर्गत परीक्षण के विभिन्न पदों की तकनीकी विशेषताओं को ज्ञात किया जाता है तथा इन तकनीकी विशेषताओं के आधार पर प्रश्नों को चयनित किया जाता है, सुधार किया जाता है अथवा अस्वीकार कर दिया जाता है।

पद विश्लेषण

पद विश्लेषण के आधार पर प्रश्नों का चयन अथवा प्रश्नों को स्वीकार/अस्वीकार किया जाता है। पद विश्लेषण में प्रश्नों की दो तकनीकी विशेषताएं यथा- कठिनाई स्तर तथा विभेदन क्षमता की गणना की जाती है। किसी प्रश्न के कठिनाई स्तर से तात्पर्य छात्रों की दृष्टि में प्रश्न की कठिनता से है, जबकि प्रश्न की विभेदन क्षमता बतलाती है कि प्रश्न अच्छे व कमजोर छात्रों में अंतर करने में किस सीमा तक सफल होता है।

कठिनाई स्तर $= 100 - \frac{(RH + RL) \times 100}{2n}$

विभेदन क्षमता गुणांक $= \frac{(RH - RL)}{n}$

RH = प्रत्येक प्रश्न के लिए उच्च समूह के छात्रों के द्वारा दिये गए सही उत्तरों की संख्या

RL = प्रत्येक प्रश्न के लिए निम्न समूह के छात्रों के द्वारा दिये गए सही उत्तरों की संख्या

प्रश्नों का चयन करना

पद विश्लेषण के आंकड़ों के आधार पर प्रश्नों में सुधार किया जाता है तथा प्रश्नों का चयन किया जाता है।

परीक्षण का मूल्यांकन करना

परीक्षण निर्माण का अंतिम सोपान परीक्षण का मूल्यांकन करना है। पद विश्लेषण के आधार पर अंतिम रूप से चयनित प्रश्नों को परीक्षण के रूप में व्यवस्थित कर लिया जाता है। इस प्रकार से परीक्षण का अंतिम प्रारूप तैयार

हो जाता है। इस परीक्षण की तकनीकी विशेषताओं तथा विश्वसनीयता, वैधता तथा मानकों को सुनिश्चित किया जाता है। परीक्षण के उद्देश्य के आधार पर परीक्षण की वैधता सुनिश्चित की जाती है।

अपनी प्रगति की जाँच करें

6. निकष संदर्भित और मानक संदर्भित मूल्यांकन में अंतर स्पष्ट करें।

.....

.....

7. शिक्षक निर्मित उपलब्धि परीक्षण का निर्माण करें।

.....

.....

5.11 सारांश

गणित शिक्षण हो या अन्य विषय की शिक्षण हो, विद्यार्थियों में उपलब्धि के स्तर को जानने के लिए मूल्यांकन की आवश्यकता होती ही है। मूल्यांकन हमें विद्यार्थियों में उपलब्धि के स्तर के साथ-साथ एक शिक्षक को अपनी शिक्षण को और भी प्रभावी बनाने का अवसर देती है। मूल्यांकन कई प्रकार से किये जा सकते है। व्यक्तिनिष्ठ परीक्षण की विश्वसनीयता और वस्तुनिष्ठता वस्तुनिष्ठ परीक्षण की तुलना में कम होती है। आजकल विद्यार्थियों के शैक्षिक उपलब्धि के साथ-साथ सह-शैक्षिक उपलब्धियों के भी मूल्यांकन पर जोर दिया जा रहा है। शिक्षक विद्यार्थियों के उपलब्धि जानने के लिए उपलब्धि परीक्षण का निर्माण करता है।

5.12 अपनी प्रगति की जाँच के लिए अपेक्षित उत्तर

1. 5.3.0 मापन और मूल्यांकन की अवधारणा
2. 5.4.0 मूल्यांकन उपकरण : अर्थ और आवश्यकता
3. 5.5.0 नैदानिक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण
4. 5.8.0 सतत और व्यापक मूल्यांकन
5. 5.7.0 संरचनात्मक और योगात्मक मूल्यांकन
6. 5.9.0 निकष संदर्भित तथा मानक संदर्भित मूल्यांकन
7. 5.10.0 ब्लू-प्रिंट की रचना और गणित में शिक्षक निर्मित उपलब्धि परीक्षण का निर्माण

5.13 संदर्भ पुस्तकें

- सिंह, योगेश कुमार (2010). गणित शिक्षण: आधुनिक पद्धतियाँ. नई दिल्ली: ए.पी.एच. पब्लिशिंग हाउस.
- मंगल, एस.के. (2005). गणित शिक्षण. नई दिल्ली: आर्य बुक डिपो
- नेगी, जे.एस. (2007). गणित शिक्षण. आगरा: विनोद पुस्तक मंदिर

- कुलश्रेष्ठ, ए.के. (2007). गणित शिक्षण. मेरठ: आर. लाल बुक डिपो
- The Teaching of Mathematics by I.W.A. Young.
- The Teaching of Mathematics by K.S. Sidu.
- AMT-01. Teaching Mathematics. IGNOU Series.
- Boyer, C. B. (1968). History of Mathematics. New York: John Wiley.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-49.
- Devlin K. (2011). Introduction to Mathematical thinking. Ernest P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education.

निवेदन

विगत कुछ वर्षों से सेवारत शिक्षकों के लिए अध्यापक शिक्षा कार्यक्रम उथल पुथल के दौर से गुजरा है। इस संदर्भ में नयी पाठ्यचर्या को लागू करना और उसके अनुसार समय की सीमा के अन्तर्गत अध्येताओं को सामग्री उपलब्ध करवाना एक चुनौती भरा कार्य था। इस चुनौती को जिन लेखकों और संकलनकर्ताओं की मदद से सुगम किया गया, वे सब बधाई के पात्र हैं। प्रत्येक अध्ययन सामग्री में जिन मूल पुस्तकों का सहयोग लिया गया है, उनका यथासंभव संदर्भ ग्रन्थों के रूप में उल्लेख किया गया है। लेखक और संकलनकर्ता मूल ग्रन्थों के लेखकों के उद्यम और बौद्धिक सक्रियता का सम्मान करते हैं और इनके प्रति आभार ज्ञापित करते हैं। यदि यह ज्ञात होता है कि किसी मूल ग्रन्थ का नामोल्लेख रह गया है तो उसे भी हम साभार सम्मिल्लित करेंगे। पाठकों से अनुरोध है कि वे अपना फीडबैक उपलब्ध कराते रहे जिससे इस सामग्री को उत्तरोत्तर गुणवत्ता संपन्न किया जा सके।